

Examen d'Analyse
Section : P.C.1

Durée : 2h

Date : 21 Décembre 2024

Nbre de pages : 3

Exercice / 7 points

Soit $k \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. On dira qu'une fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est solution de (*) si f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = kf\left(\frac{1}{x}\right).$$

1. Montrer que si f est solution de (*) alors f est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(E_k) : x^2 y''(x) + k^2 y(x) = 0.$$

2. Trouver un réel $\alpha > \frac{1}{2}$ tel que $y : x \in]0, +\infty[\mapsto x^\alpha$ soit solution de (E_k) .

3. Soit $y :]0, +\infty[\rightarrow x^\alpha z(x)$ avec $z : x \in]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois dérivable.

(a) Montrer que y est solution de (E_k) si et seulement si z' est solution d'une équation différentielle linéaire (E'_k) d'ordre 1 à déterminer.

(b) Résoudre (E'_k) sur $]0, +\infty[$.

(c) En déduire que l'ensemble des solutions de (E_k) est l'ensemble des fonctions de la forme $x \in]0, +\infty[\mapsto ax^\alpha + bx^{1-\alpha}$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

4. Déterminer les solutions de (*).

Problème / 13 points

Soient (a_n) une suite réelle positive telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n - l| \leq a^n, \quad \text{avec } a \in [0, 1[, \quad l \in \mathbb{R}$$

et (u_n) la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n + a_n + 1}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Le but du problème est de montrer que la suite (u_n) converge.

Partie I

1. Montrer que (a_n) converge vers l et que $l \geq 0$.
2. Dédurre que (a_n) admet une borne supérieure. Soit $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} (a_n)$.
3. Montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{1}{M+2} \leq u_n \leq 1.$$

Partie II

Considérons la suite récurrente réelle (v_n) donnée par

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{1}{v_n + l + 1}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

et la fonction $f : x \in]0, +\infty[\mapsto \frac{1}{x + l + 1}$.

1. Montrer que la suite (v_n) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $L > 0$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f(v_n) - f(L)| \leq \frac{1}{L+1} |v_n - L|.$$

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|v_n - L| \leq \left(\frac{1}{L+1} \right)^n |v_0 - L|.$$

5. En déduire que (v_n) converge et déterminer sa limite.
6. Vérifier que (v_n) admet une borne inférieure $m > 0$. (**Indication** : On pourra considérer les sous suites (v_{2n}) et (v_{2n+1})).

Partie III

Considérons la suite (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$w_n = u_n - v_n.$$

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1} = \frac{-w_n + (l - a_n)}{(u_n + a_n + 1)(v_n + l + 1)}.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|w_{n+1}| \leq \frac{1}{m+1} (|w_n| + |a_n - l|).$$

3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|w_n| \leq \left(\frac{1}{m+1} \right)^n |w_0| + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{m+1} \right)^{n-k} |a_k - l|.$$

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{m+1}\right)^{n-k} |a_k - l| \leq \begin{cases} \frac{n}{(m+1)^n} & \text{si } a = \frac{1}{m+1} \\ \frac{1}{(m+1)^n(1-a(m+1))} & \text{si } a \neq \frac{1}{m+1} \end{cases}.$$

5. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

6. **Application** : montrer que la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n + 2^{-n} + 1}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

converge et déterminer sa limite.

Bon Travail