

Section : PC 1

Date : 15-05-2025

Matière : Algèbre

Durée : 2 heures

## Devoir de Synthèse N° 02



La majorité des questions repose sur des idées simples que vous avez rencontrées en cours. Prenez le temps de bien lire l'énoncé, restez confiants et avancez avec méthode. Vous avez les clés en main. Bonne chance !



L'usage des calculatrices est interdit.

### Exercice 1

1. Soient  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  vérifiant :

$$f(1) = 2 - X - X^2, \quad f(X) = 1 - X^2 \quad \text{et} \quad f(X^2) = -2 + 2X + 3X^2.$$

- (a) Déterminer  $A = \text{Mat}(f, \mathcal{B})$ .
- (b) Montrer que  $f^2 - 4f = -3\text{id}_{\mathbb{R}_2[X]}$ .
- (c) Dédurre que  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  et donner  $f^{-1}$ .

2. Considérons les endomorphismes de  $\mathbb{R}_2[X]$  suivants :

$$\varphi = f - \text{id}_{\mathbb{R}_2[X]} \quad \text{et} \quad \psi = f - 3\text{id}_{\mathbb{R}_2[X]}.$$

- (a) Montrer que  $\varphi$  et  $\psi$  ne sont pas injectifs.
- (b) Trouver deux polynômes  $P_1$  et  $P_2$  tels que  $\mathcal{B}_1 = (P_1, P_2)$  soit une base de  $\ker(\varphi)$ .
- (c) Trouver un polynôme  $P_3$  tel que  $\mathcal{B}_2 = (P_3)$  soit une base de  $\ker(\psi)$ .
- (d) Montrer que  $\ker(\varphi) \oplus \ker(\psi) = \mathbb{R}_2[X]$ .
- (e) Montrer qu'il existe  $\mathcal{B}'$  une base de  $\mathbb{R}_2[X]$  telle que  $\text{Mat}(f, \mathcal{B}')$  soit diagonale.
- (f) Rappeler la relation entre les matrices  $A$  et  $\text{Mat}(f, \mathcal{B}')$ .
- (g) Vérifier que  $\frac{1}{2}\varphi$  et  $-\frac{1}{2}\psi$  sont des projecteurs de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
- (h) Dédurre que  $\text{Im}(\varphi) \oplus \text{Im}(\psi) = \mathbb{R}_2[X]$ .

## Exercice 2

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie et  $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ .

1. Rappeler la formule de Grassmann.
2. Montrer que  $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$ .
3. Montrer que

$$|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g).$$

## Problème:

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . On désigne par  $E_p$  l'ensemble des suites réelles  $p$ -périodiques, c'est-à-dire :

$$E_p = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_{n+p} = u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

1. Montrer que  $E_p$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .
2. Soit l'application  $f : E_p \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $(u_n) \mapsto (u_0, \dots, u_{p-1})$ .
  - (a) Montrer que  $f$  est un isomorphisme.
  - (b) Dédurre la dimension de  $E_p$ .
  - (c) Chercher une base de  $E_p$ .
3. Considérons l'application  $T : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ,  $(u_n) \mapsto (u_{n+1})$ .
  - (a) Montrer que  $T$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .
  - (b) Montrer que  $T$  n'est pas injectif et déterminer une base de  $\ker(T)$ .
  - (c) Étudier la surjectivité de  $T$ .
  - (d) Vérifier que  $\ker(T^p - \text{id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}) = E_p$ .
  - (e) Montrer que  $T(E_p) \subset E_p$ .
4. Soit l'endomorphisme  $T_p : E_p \rightarrow E_p$ ,  $(u_n) \mapsto T((u_n))$ .
  - (a) Déterminer  $\ker(T_p)$ .
  - (b) Vérifier si  $T_p$  est un automorphisme de  $E_p$ .
5. Soit  $F$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  défini comme suit :

$$F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_{n+2} + u_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

- (a) Montrer que  $F$  et  $E_2$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E_4$ .
- (b) Chercher une base de  $F$  et donner  $\dim(F)$ .
- (c) Prouver que  $F \oplus E_2 = E_4$ .
- (d) Démontrer que  $\frac{1}{2}(\text{id}_{E_4} - T_4^2)$  est la projection sur  $F$  parallèlement à  $E_2$ .