

Section : PC1

Date : 29-2-2025

Matière : Algèbre

Durée : 1h30mn

Devoir de Contrôle N° 02

☞ L'usage de calculatrices est interdit.

☞ Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation.

Exercice 1

Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et F le sous-ensemble de E défini par :

$$F = \{P \in E \mid P(-1) = 0\}.$$

Considérons dans E les polynômes suivants :

$$P_1 = X^2 + 2X + 1 \quad P_2 = 3X^2 + X - 2 \quad \text{et} \quad P_3 = 1 - 2X^2.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

2. Montrer que $F = \text{vect}(P_1, P_2)$.

3. Soit $G = \text{vect}(P_3)$. Montrer que $F \oplus G = E$.

4. Soit H le sous-espace vectoriel de E défini par :

$$H = \{P \in E \mid P(2) = 0\}.$$

(a) Montrer que $F + H = E$.

(b) Déterminer $F \cap H$.

(c) A-t-on $F \oplus H = E$?

5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha \neq \beta$. Considérons dans $\mathbb{R}_n[X]$ les sous-espaces vectoriels suivants :

$$F_\alpha = \{P \in E \mid P(\alpha) = 0\} \quad \text{et} \quad F_\beta = \{P \in E \mid P(\beta) = 0\}.$$

(a) Montrer que $F_\alpha + F_\beta = \mathbb{R}_n[X]$.

(b) Factoriser le polynôme $X^2 - (\alpha + \beta)X + \alpha\beta$.

(c) Montrer que $F_\alpha \oplus F_\beta = \mathbb{R}_n[X] \iff n = 1$.

Exercice 2

On considère dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme suivant :

$$P = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + 8X^2 + 4X + 1.$$

1. Montrer $(X + 1)^2$ divise P .
2. (a) Montrer que $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ est une racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.
(On rappelle que $j^2 + j + 1 = 0$.)

(b) En déduire toutes les racines de P .
3. Factoriser le polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.
4. Soit $F(X) = \frac{1}{P(X)}$ une fraction rationnelle dans $\mathbb{R}(X)$. Déterminer la fraction $G \in \mathbb{R}(X)$ définie par $F = G^2$.
5. Décomposer G en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.
6. Déduire que :

$$F(X) = \frac{1}{(X+1)^2} - \frac{2}{X+1} + \frac{2X+2}{X^2+X+1} + \frac{1}{X^2+X+1} - \frac{X+1}{(X^2+X+1)^2}.$$

7. En déduire les polynômes U et V qui vérifient la relation suivante :

$$(X+1)^2.U + (X^2+X+1)^2.V = 1.$$