

Devoir de synthèse n°2
ANALYSE - PC 1

Date : 12/05/2025

Durée : 2h

Nombre de pages : 2

N.B. *Aucun document n'est autorisé et l'usage des calculatrices est interdit.*EXERCICE 1On considère la fonction f définie sur $] -1, \pi[\setminus \{0\}$ par $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} + 2 \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$.

1. (a) Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de f .
 (b) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 et donner son prolongement $\tilde{f}$ sur $] -1, \pi[$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
 (a) Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction F_α définie par : $F_\alpha(x) = \frac{\tilde{f}(x)}{(1+x^2)^\alpha}$.
 (b) Montrer que F_α est dérivable en 0 et donner $F'_\alpha(0)$.
 (c) Donner l'équation de la tangente T à la courbe de F_α au point $(0, F_\alpha(0))$.
 (d) Discuter, suivant les valeurs de α , la position relative de la courbe de F_α et sa tangente T au voisinage du point $(0, F_\alpha(0))$.

EXERCICE 2

Soit

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}.$$

1. Montrer que F est bien définie sur $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
2. Vérifier que F est de classe C^1 sur D et montrer que

$$\forall x \in D, F'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}.$$

3. (a) Montrer que $\forall x \in D$,

$$\frac{x^2 - x}{2 \ln(x)} \leq F(x) \leq \frac{x^2 - x}{\ln(x)}.$$

- (b) En déduire les limites de F en 0^+ et en $+\infty$.

4. (a) Montrer que $\forall x \in D, \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln(t)} = \ln(2)$.

(b) Montrer que

$$\forall x \in]0, 1[, x^2 \ln(2) \leq F(x) \leq x \ln(2),$$

et

$$\forall x \in]1, +\infty[, x \ln(2) \leq F(x) \leq x^2 \ln(2).$$

(c) En déduire que F est prolongeable par continuité en 1. Le prolongement de F sera noté aussi F .

5. (a) Calculer le développement limité de $F'(x+1)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

(b) Déduire le développement limité de $F(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 1.

(c) En déduire que F est dérivable en 1.

EXERCICE 3

Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\tan(x)} dx.$$

1. En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{\tan(x)}$, montrer que

$$I = 2 \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4} dt$$

2. (a) Vérifier que

$$\frac{t^2}{1+t^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{t}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} - \frac{t}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} \right).$$

(b) Prouver, sans calculer les intégrales que

$$\int_0^1 \frac{t}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} dt = \int_0^{-1} \frac{t}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} dt$$

(c) Exprimer alors l'intégrale I en fonction de l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{t}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} dt$.

(d) On rappelle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
Déterminer alors la valeur de

$$\arctan(\sqrt{2} + 1) + \arctan(\sqrt{2} - 1).$$

(e) Calculer l'intégrale

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{t^2 - \sqrt{2}t + 1}.$$

3. Déduire des questions précédentes que

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{\tan(x)} dx = \alpha [\ln(\beta) + \pi]$$

où α et β sont deux réels à préciser.

Bon travail.