

Institut Préparatoire aux Etudes
d'Ingénieur de Sfax

Devoir surveillé d'Analyse n 2
Section : P.C.1

Exercice

1. Rappeler l'énoncé du théorème de Taylor-Lagrange.
2. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \ln(1+t)$. Calculer les dérivées successives de f jusqu'à l'ordre 4.
3. Montrer que : $\frac{7}{12} \leq \ln(2) \leq \frac{157}{192}$.

Problème

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{sh(x)}$.

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur son ensemble de définition.
2. (a) Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$. On note son prolongement par f aussi.
(b) Déterminer, sur $\mathbb{R}^*$, la dérivée f' .
(c) Dédire que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
(Ind. On pourra utiliser la règle de l'hôpital :
Soit $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ avec $a < b$, soit $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que g' ne s'annule pas. Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ et si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.)
3. (a) Résoudre l'équation $sh(x) = 1$, on note α sa solution.
(b) Vérifier que $\alpha \in]0, 1[$ et calculer $ch(\alpha)$.
4. (a) Montrer que la fonction $g : t \mapsto ch(t) - t$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$ et déduire le signe de g .
(b) Montrer que $\forall t \geq 0, 0 \leq tch(t) - sh(t) \leq \frac{sh^2(t)}{2}$.
(c) Dédire que f est k -lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$, où k est un réel à préciser.
5. (a) Montrer que f est monotone sur $\mathbb{R}_+$.
(b) Montrer que f admet sur $[0, 1]$ un point fixe dont on précisera.
6. On définit une suite (u_n) par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
- (b) Déterminer la nature de la suite (u_n) .