

Devoir surveillé de Physique du deuxième semestre

(Durée : 1H30 mn)

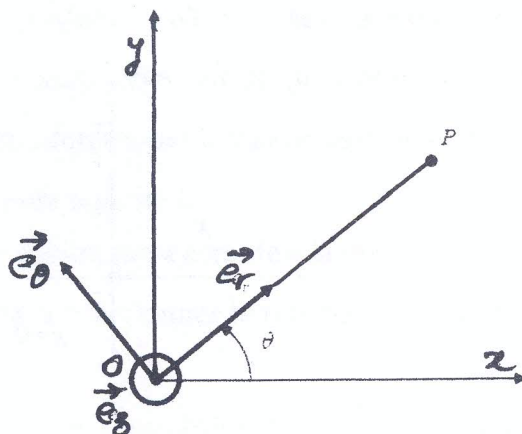
Mécanique (07 points)

On s'intéresse au mouvement d'un point matériel P, de masse m , placé dans le champ newtonien engendré par une masse $M \gg m$. Cette dernière masse se situe à l'origine d'un repère $Oxyz$ et sera considérée comme immobile dans le référentiel galiléen associé au repère $Oxyz$. L'attraction de la masse M sur le point P s'écrit : $\vec{F} = -\frac{mMG}{r^2} \vec{e}_r$.

Où G est la constante de la gravitation, telle que $G=6.67 \cdot 10^{-11} \text{N m}^2 \text{kg}^{-2}$, $r = \|\vec{OP}\|$

- 1) Montrer que le mouvement de P est plan.
- 2) On suppose alors que le mouvement de P se situe dans le plan xOy et on repère la position de P par ses coordonnées polaires. Soit $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ la base polaire associée au plan du mouvement. Montrer que la quantité $C = r^2 \dot{\theta}$ est une constante du mouvement.

Figure 1



- 3) On rappelle les formules de Binet pour la vitesse et l'accélération radiale de P :

$$\vec{v}_P = -C \frac{du}{d\theta} \vec{e}_r + Cu \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a}_P = -C^2 u^2 \left[\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right] \vec{e}_r, \quad \text{où } u = \frac{1}{r}.$$

Montrer que l'équation polaire de la trajectoire s'écrit sous la forme :

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cdot e \cdot \cos(\theta - \theta_0)}$$

où $p > 0$ et $e > 0$ et θ_0 sont trois constantes ($\varepsilon = \pm 1$). Exprimer p en fonction de C , M et G .

- 4) On suppose dans la suite que $\theta_0 = 0$ et que $\varepsilon = 1$.

Pour $e < 1$ on parle de trajectoire elliptique liée. Exprimer le demi-grand axe a en fonction de p et de e (e est l'excentricité de l'ellipse).

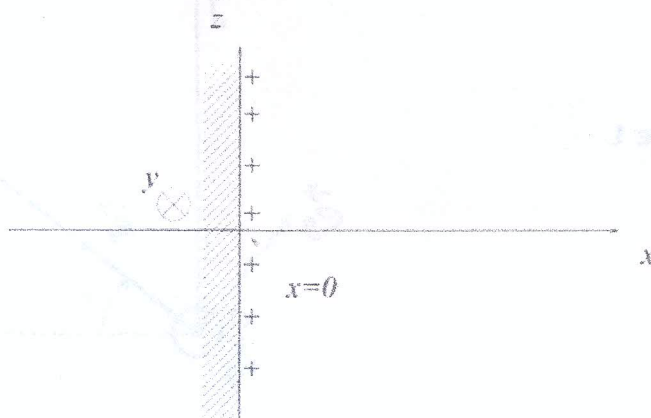
- 5) Donner l'expression de l'énergie potentielle E_p , du point P moyennant l'hypothèse que celle-ci s'annule à l'infini.
- 6) Donner l'expression de l'énergie mécanique totale E_m en fonction de m, M, G et a .
- 7) Considérons le système solaire pour lequel on précise les masses du Soleil, de la Terre et de Mars, respectivement $M_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg, $m_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg et $m_M = 6.42 \cdot 10^{23}$ kg. Les trajectoires de la Terre et de Mars sont supposées circulaires centrées au niveau du Soleil et de rayons respectifs $r_T = 1.5 \cdot 10^{11}$ m et $r_M = 2.28 \cdot 10^{11}$ m et situées dans le même plan. Calculer les vitesses orbitales v_T et v_M de la Terre et de Mars. On rappelle la troisième loi de Kepler : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{MG}$.

Electrostatique (13 points)

I. Champ créé par une surface chargée.

On considère un milieu défini par le demi-espace $x < 0$. La surface de ce milieu est un plan infini défini par $x = 0$. Cette surface porte une charge de densité surfacique uniforme positive égale à σ . Le demi-espace $x > 0$ est le vide (figure 2). Le champ électrique régnant dans la zone $x < 0$ est nul : $\vec{E}_0(x < 0) = \vec{0}$.

Figure 2



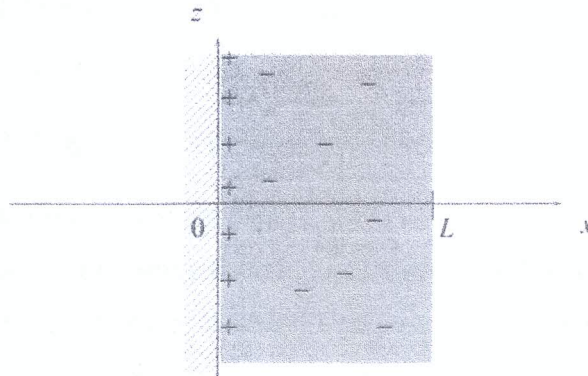
- 1) Déterminer, par des arguments de symétrie et d'invariance, la direction et la dépendance du champ $\vec{E}_0$ régnant dans le demi-espace vide $x > 0$.
- 2) A l'aide du théorème de Gauss, déterminer la valeur du champ électrique $\vec{E}_0$ en tout point du demi-espace $x > 0$. Exprimer le résultat en fonction de la densité de charge surfacique σ et ϵ_0 , où ϵ_0 est la permittivité du vide.

- 3) Enoncer la relation existante entre le potentiel électrostatique $V_0(x)$ et le champ électrique $\vec{E}_0$ trouvé à la question précédente. Déterminer à une constante près, l'expression de $V_0(x)$ en tout point du demi-espace $x > 0$.

II. Ecrantage par une densité volumique de charge uniforme

Au voisinage de la surface $x = 0$, se trouve une distribution volumique uniforme de charge, dont la densité volumique de charge est notée ρ . La distribution volumique de charge est répartie entre les plans définis par $x = 0$ et $x = L$ où L est une épaisseur caractéristique que l'on se propose de déterminer ultérieurement. La densité de charge volumique ρ est de signe opposé à la densité de charge surfacique σ et ne perturbe pas celle-ci. La charge volumique est nulle pour tout $x > L$ (figure 3).

Figure 3



- 1) Déterminer, par des arguments de symétrie et d'invariance, la direction et la dépendance du champ $\vec{E}_{tot}$ en considérant à la fois la distribution surfacique σ et volumique ρ .
- 2) Par application du théorème de Gauss, déterminer la valeur du champ électrique $\vec{E}_{tot}$ pour $0 < x \leq L$. Montrer que $\vec{E}_{tot}$ est uniforme pour $x > L$.
- 3) On dit que la distribution de charge volumique « écrante » la distribution surfacique de charge lorsque le champ $\vec{E}_{tot}$ s'annule pour $x > L$. Donner la relation entre ρ , σ et L pour laquelle la condition d'écrantage est vérifiée.

Dans la suite on suppose que $\sigma = -\rho L$ et que la condition d'écrantage est satisfaite :

pour tout $x > L$, $\vec{E}_{tot}(x) = \vec{0}$.

- 4) Donner l'expression du potentiel $V_{tot}(x)$ en tout point du demi-espace $x > 0$. On distinguera les intervalles $0 < x \leq L$ et $x > L$ et on choisira $V_{tot}(L) = 0$.
- 5) Sachant que l'énergie électrostatique par unité de surface associée à la distribution de charge représentée sur la figure 3 est donnée par : $\omega = \int_0^{+\infty} \frac{\epsilon_0 \vec{E}_{tot}^2(x)}{2} dx$

Exprimer ω en fonction de σ , L et ϵ_0 .