

Devoir de contrôle d'Algèbre

Durée: 1 heure

N.B. La clarté et la qualité de la rédaction sont des éléments importants dans l'appréciation de la copie. L'usage des calculatrices est interdit. Bon courage!

Exercice 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère la somme double

$$S_n = \sum_{0 \leq k \leq j \leq n} 2^j.$$

(1) Montrer que $S_n = n2^{n+1} + 1$.

(2) Vérifier que $S_n = \sum_{j=0}^n (j+1)2^j$.

(3) En déduire que

$$\sum_{k=1}^n k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1.$$

(4) Déterminer alors la valeur de

$$T_n = \sum_{p=1}^n \sum_{k=1}^{p+1} k2^{k-1}.$$

Exercice 2.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n , ($n \in \mathbb{N}^*$) à coefficients complexes.

(1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n + A^{n-1} + \dots + A + I_n = 0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

(2) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par:

$$A = \begin{pmatrix} 2i+1 & i+1 & -i-1 \\ 0 & i & 0 \\ 2i+2 & 2i+2 & -i-2 \end{pmatrix}$$

On admet que

$$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer le déterminant de A et en déduire que A est inversible.

(b) Calculer $A^3 + A^2 + A$ puis déduire A^{-1} .

(3) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système linéaire suivant:

$$(S) : \begin{cases} iy & = 0 \\ (2i+1)x + (i+1)y - (i+1)z & = 1 \\ (2i+2)x + (2i+2)y - (i+2)z & = 2 \end{cases}$$