

Devoir de synthèse d'Algèbre

Durée: 2 heures

N.B. La clarté et la qualité de la rédaction sont des éléments importants dans l'appréciation de la copie. L'usage des calculatrices est interdit. Bon courage!

Exercice.

Soient $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- (1) Montrer que $a - b$ divise $a^n - b^n$.
- (2) Dans cette question, on prend $a \geq 3$ et $n \geq 1$.
 - (a) Donner le quotient q et le reste r de la division euclidienne de a^n par $a - 1$.
 - (b) Montrer que $q = (a - 1) \left[\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} a^j \right] + n$.
 - (c) En déduire que $\text{pgcd}(q, a - 1) = \text{pgcd}(a - 1, n)$, avec $n < a - 1$.

Problème.

Dans ce problème, on note par:

- * $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carées d'ordre n , ($n \in \mathbb{N}^*$) à coefficients réels.
- * $E = GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- * ${}^t(M)$ la matrice transposée de la matrice M .

Partie1.

Soit $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- (1) Montrer que si $M, N \in E$ alors $MN \in E$ et $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$.
- (2) Montrer que si $M \in E$ alors ${}^t(M) \in E$ et $({}^t(M))^{-1} = {}^t(M^{-1})$.
- (3) Montrer que ${}^t(MN) = {}^t(N) \times {}^t(M)$.

Partie2.

On définit les applications suivantes:

$$\begin{array}{ll} f : E \longrightarrow E & g : E \longrightarrow E \\ A \longmapsto {}^t(A^{-1}) \times A & A \longmapsto P^{-1} \times {}^t(A) \times P \end{array}$$

avec P fixé dans E tel que ${}^t(P) \times P = I_n$, où I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- (1) (a) Calculer $f^{-1}(\{I_n\})$.
 (b) Etudier l'injectivité de f .
- (2) (a) Montrer que pour $A \in E$ on a $f(A) \in E$.
 (b) Vérifier que pour $A \in E$ on a $\det(f(A)) = 1$.
 (c) f est-elle surjective? Justifier.
- (3) Montrer que g est une bijection et donner g^{-1} .
- (4) Soit h l'application définie par:

$$\begin{aligned} h : E &\longrightarrow E \\ A &\longmapsto f \circ g(A) \end{aligned}$$

- (a) Que peut-on conclure sur la surjectivité de h ? Justifier.
- (b) Soit $A \in E$, calculer $h(A)$.
- (c) En déduire que $h(A) = g({}^t(f(A))^{-1})$, $\forall A \in E$.

Partie3.

On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E par:

$$\forall (A, B) \in E^2, \quad A \mathcal{R} B \iff {}^t(A^{-1}B) = B^{-1}A$$

- (1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E .
- (2) Déterminer la classe d'équivalence de la matrice λI_n avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.