

Devoir Surveillé d'Analyse
Section : P.C.1

Durée : 1h

Date : 28 Octobre 2025

Nbre de pages : 2

Exercice 1

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : 2x(1-x)y'(x) + y(x) = (1-x)\sqrt{\frac{x}{1+x}}, \quad x \in]0, 1[.$$

1. Déterminer deux constantes α et β telles que $\frac{1}{2x(1-x)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{1-x}$.
2. Résoudre l'équation (E) sur $]0, 1[$.
3. Déterminer l'unique solution de (E) définie sur $]0, 1[$ et vérifiant de $y(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 2

On note f la fonction d'expression

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

et g la fonction d'expression

$$g(x) = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{x-2}{x}\right).$$

1. (a) Donner les domaines de définition de f et g .
On notera D le domaine de définition de g dans la suite de l'exercice.
(b) Donner une expression simple de $\sin^2(f(x))$ et $\sin^2(g(x))$ pour tout $x \in D$.
(c) Dédurre que $f = g$.
(d) Étudier la dérivabilité de g en 1.
(e) Déterminer le domaine de dérivabilité de g et calculer g' .
(f) Retrouver, d'une autre façon, que $f = g$.
2. Soit $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$. En vous aidant d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_2^{\frac{1}{\sin^2(a)}} f(t) dt = \frac{a}{\sin^2(a)} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\tan(a)} - 1.$$

3. Soit $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Exprimer $\int_2^{\frac{1}{\sin^2(a)}} f(t)dt$ en fonction de $\int_{\frac{\pi}{4}}^a \frac{dt}{\sin^2(t)}$.

(Ind : On pourra utiliser le changement de variable : $t = \frac{1}{\sin^2(u)}$, puis faire une intégration par parties.)

4. Dédire une expression simple de $\int_{\frac{\pi}{4}}^a \frac{dt}{\sin^2(t)}$, pour $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$.