

Examen n°1 en Analyse
Section: P.C.1

Durée: 2h

Date: Décembre 2025

Nbre de pages: 2

Exercice 1

On considère l'équation différentielle $(E) : x^2 y''(x) + xy'(x) - y(x) = x^2$, pour $x > 0$.

1. Soit $y :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On pose $z(t) = y(e^t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Exprimer $z'(t)$ et $z''(t)$ en fonction de y' , y'' et t .

(b) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle

$$(F) : z''(t) - z(t) = e^{2t}.$$

2. Résoudre (F) sur $\mathbb{R}$.

3. Dédire les solutions de l'équation (E) sur $]0, +\infty[$.

4. Déterminer la solution de (E) vérifiant les conditions initiales : $y(1) = 0$ et $y'(1) = 1$.

Exercice 2

On considère l'ensemble :

$$E = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \mid p, q \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

1. Montrer que l'ensemble E est borné.

2. Dédire l'existence de $\sup E$ et $\inf E$.

3. Déterminer $\sup E$.

4. Montrer que $\inf E = 0$.

5. E admet-il un minimum?

Problème

Soit a un réel strictement positif. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par:

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n e^{-u_n}.$$

Les parties **II**, **III** et **IV** présentent trois méthodes différentes pour chercher la nature de convergence de la suite (u_n) et pour calculer sa limite.

Les parties **II**, **III** et **IV** sont indépendantes.

Partie I:

1. Déterminer sur $[0, +\infty[$ les réels x vérifiant $f(x) = x$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto xe^{-x}$ sur $[0, +\infty[$.

Partie II:

1. Cas où $0 < a < 1$.
 - (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.
 - (b) En étudiant la monotonie de (u_n) , montrer qu'elle converge.
 - (c) Déterminer la limite de (u_n) .
2. Cas où $a \geq 1$.
 - (a) Vérifier que $0 < u_1 < 1$.
 - (b) Dédire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Partie III: On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$.

1. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .
2. Montrer que la suite (v_n) est strictement décroissante.
3. Montrer que la suite (v_n) diverge (**Ind:** on pourra utiliser un raisonnement par l'absurde)
4. Dédire la limite de (v_n) puis celle de (u_n) .

Partie IV:

1. (a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a $e^x \geq 1 + x$.
(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq \frac{u_n}{1 + u_n}$.
On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = u_1$ et $w_{n+1} = \frac{w_n}{1 + w_n}$.
2. (a) Étudier sur $[0, +\infty[$ les variations de la fonction $h : x \mapsto \frac{x}{1 + x}$
(b) En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq w_n$.
3. On pose $t_n = \frac{1}{w_n}$.
 - (a) Montrer que (t_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
 - (b) En déduire une expression explicite de w_n en fonction de n et de w_0 .
4. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \leq \frac{1}{n - 1 + \frac{1}{u_1}}$.
5. Dédire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.