

Devoir de synthèse de Physique du premier Semestre

(Durée : 3 H)

Question de cours (2points)

Considérons un point matériel M de masse m en mouvement par rapport à un référentiel donné R(o,x,y,z) avec une vitesse $\vec{V}(M/R)$.

- 1- Donner la définition et l'expression du moment cinétique $\vec{L}_O(M / R)$ en O de M par rapport à R
- 2- Enoncer (définition) puis démontrer le théorème du moment cinétique.

Problème 1

Soit (oxy) un plan horizontal d'un référentiel fixe supposé Galiléen R (O, x, y, z) de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé et direct. Un point matériel M de masse m se déplace sans frottement sur une tige (T) qui est constamment (toujours) en contact par son extrémité O₁ avec l'axe ox. Le point O₁ se déplace sur l'axe ox (voir figure 1).

Soit $\mathcal{R}_I (O_1, x_1, y_1, z_1 = z)$ de base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ orthonormée et direct. Un référentiel relatif lié à la tige (T) tel que l'axe O₁x₁ confondue avec la tige. La tige (T) effectue également un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe O₁z₁.

Le point matériel M est soumis à une force $\vec{F}$ portée par l'axe O₁x₁ dirigé de M vers O₁ dont le module est proportionnel à la distance O₁M = $\rho(t)$ soit $m\beta^2\rho$ où β est une constante positive.

Les paramètres du système seront $\|\vec{OO_1}\| = x(t)$, $\|\vec{O_1M}\| = \rho(t)$ et $\varphi(t) = (\vec{i}, \vec{e}_\rho) = \omega t$

A l'instant $t = 0$, on donne $\rho = \rho_0$ et la vitesse relative de M, $V(M/\mathcal{R}_I) = 0$.

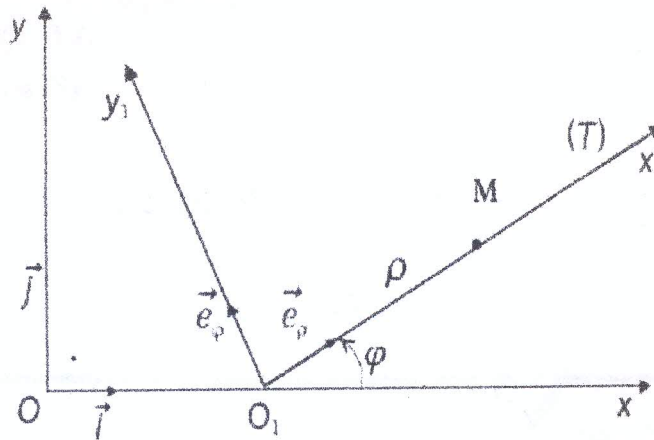


Figure 1

I- Etude cinématique du mouvement de M

- 1- Le référentiel $\mathcal{R}_I$ est-il galiléen ? justifier clairement votre réponse.
- 2- Donner le vecteur vitesse de rotation de $\mathcal{R}_I$ par rapport à R $\vec{\omega}(\mathcal{R}_I/R)$.
- 3- Déterminer la vitesse et l'accélération absolue du point O_1 par rapport à R dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$
- 4- Déterminer le vecteur position $\vec{OM}$ en fonction de $x, \rho, \vec{i}$ et $\vec{e}_\rho$.
- 5- Calculer directement dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$
 - a- La vitesse absolue de M : $\vec{V}(M/R)$.
 - b- L'accélération absolue de M $\vec{\gamma}(M/R)$
- 6- Déterminer dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ de $\mathcal{R}_I$
 - a- La vitesse relative de M.
 - b- L'accélération relative.
 - c- La vitesse d'entraînement de M.
 - d- L'accélération d'entraînement.
 - e- L'accélération de Coriolis.
- 7- Les lois de composition des vitesses et des accélérations sont-elles vérifiées

II- Etude dynamique du mouvement de M dans $\mathcal{R}_I$

Toutes les grandeurs vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$

- 1- Faire le bilan de forces appliquées à M dans le référentiel de $\mathcal{R}_I$
- 2- Appliquer à M le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel mobile $\mathcal{R}_I$

3- Déduire l'équation différentielle du mouvement de M le long de la tige (T). on posera $\dot{x} = a$ où la est une constante positive.

a- Dans quelle condition le mouvement est-il oscillatoire donner dans ce cas la pulsation et la période d'oscillation.

b- Résoudre l'équation différentielle du mouvement de M dans le cas $\omega^2 < \beta^2$

4- Déduire les composantes de la réaction de la tige.

5- Quelle sera la vitesse minimale de M sur la tige pour que le contact entre M et (T) puisse continuer à exister dans le temps ?

III- étude énergétique du mouvement de M dans $\mathcal{R}_1$

On voudrait trouver cette équation différentielle par considération d'énergie :

1- Trouver l'expression de l'énergie potentielle totale $E_p(\rho)$

2- Trouver l'expression de l'énergie cinétique E_c et en déduire l'expression de l'énergie mécanique E_m .

3- Retrouver l'équation différentielle qui caractérise le mouvement.

4- Trouver les positions d'équilibre et discuter leur stabilité.

Problème 2 :

Une bille M, supposée ponctuelle, de masse m est accro  h  e au bout d'un ressort, de raideur k , de masse négligeable et de longueur à vide l_0 , situé sur un plan incliné faisant un angle α constant avec l'horizontale. Le mouvement de la bille sur sa trajectoire est supposé sans frottement.

On définit le référentiel orthonormé direct $R(O, x, y, z)$. On associe à ce référentiel la base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. On supposera dans tout l'exercice que le référentiel R est galiléen. Voir Figure 2.

On donne $m = 200g$, $l_0 = 30cm$, $k = 10Nm^{-1}$, $g = 10ms^{-2}$ et $\alpha = 30^\circ$.

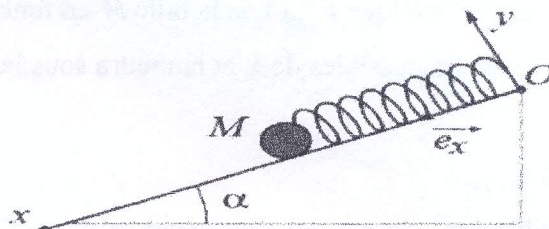


Figure 2

On lâ  che M en $x_0 = 20cm$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = 1\vec{e}_x$.

Etude dynamique :

1. Faire le bilan de toutes les forces appliquées à la bille M par rapport au référentiel R .
 2. Ecrire le principe fondamental de la dynamique par rapport au référentiel R .
 3. Dédire l'équation différentielle du mouvement en x .
 4. Exprimer la position d'équilibre x_{eq} en fonction de m, g, k, l_0 et α . Calculer sa valeur.
 5. On pose $r = x - x_{eq}$. Mettre l'équation différentielle en r régissant le mouvement de la bille M sous la forme : $\ddot{r} + \omega^2 r = 0$. Exprimer ω en fonction de k et m . calculer sa valeur.
- La solution de cette équation différentielle est de la forme $r = A \cos(\omega t + \varphi)$. Avec A et φ deux constantes d'intégrations.
6. Compte tenu des conditions initiales, exprimer les constantes $A > 0$ et φ en fonction de x_0, x_{eq}, v_0 et ω . Calculer les valeurs de A et φ .
 7. Dédire les positions maximale et minimale x_{max} et x_{min} , de la bille M en fonction de A et x_{eq} , Calculer x_{max} et x_{min} .
 8. Exprimer la réaction $\vec{R}$ exercée par l'axe (Ox) sur le point M en fonction de m, g et α .

Etude énergétique :

9. Compte tenu des données de l'exercice, $m = 200g, l_0 = 30cm, k = 10Nm^{-1}, g = 10ms^{-2}$ et $\alpha = 30^\circ$:
- 9.1. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp}(x)$ de la bille M en fonction de x . On prendra le point $x = 0$ comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur.
- 9.2. Exprimer l'énergie potentielle élastique $E_{pe}(x)$ de la bille M en fonction de x .
- 9.3. Dédire que l'expression de l'énergie potentielle $E_p(x)$ s'écrit sous la forme $E_p(x) = 5(x - 0,3)^2 - x$.
10. Calculer l'énergie mécanique E_m de la bille M .
11. Dédire l'expression de l'énergie cinétique $E_c(x)$ de la bille M en fonction de x .
12. Déterminer l'intervalle I des valeurs possibles de x et la mettre sous la forme $I = [x_1 ; x_2]$. Calculer x_1 et x_2 .
13. Comparer x_1 à x_{min} et x_2 à x_{max} .
14. Retrouver la position d'équilibre x_{eq} de x . Quelle est la nature de cet équilibre ?
15. Que peut-on dire du mouvement de M ?
16. À quelle valeur de x la bille M s'immobilisera si les frottements ne sont pas tout à fait nuls ?