
Devoir de Contrôle N° 1 : **Analyse**
Durée : 1H30

EXERCICE 1 :

1. Calculer, sur l'intervalle $]2, +\infty[$, les primitives suivantes :

a) $\int \frac{2x - 1}{x^2 - x - 2} dx$

b) $\int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$

c) $\int (e^x \sin 2x) dx$

2. Résoudre, sur l'intervalle $]2, +\infty[$, l'équation différentielle suivante :

$$(E) : (x + 1)(x - 2)y' + (2x - 1)y = e^x \sin 2x + \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

EXERCICE 2 :

Trouver la solution de l'équation différentielle :

$$(H) : y'' - 4y' + 4y = e^{2x},$$

vérifiant $y(0) = \frac{1}{2}$ et $y'(0) = 1$.

PROBLÈME :

Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \frac{\sqrt{x(2-x)}}{x-1}.$$

Partie I :

1. Déterminer le domaine de définition D_g de la fonction g .

2. Déterminer le domaine dérivabilité de g et montrer que :

$$g'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2 \sqrt{x(2-x)}}$$

3. Montrer que le graphe de g admet un point de symétrie Ω que l'on déterminera.
4. Donner le tableau de variation de g sur le domaine réduit $]1, 2]$.
5. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 2} g'(x)$ et en déduire l'équation de la demi-tangente à gauche en $x = 2$.
b) Représenter le graphe de la fonction g sur son domaine de définition D_g .

Partie II :

On définit la fonction f par :

$$f(x) = \arccos(x-1) + \arctan\left(\frac{\sqrt{x(2-x)}}{x-1}\right).$$

1. Déterminer les domaines de définition D_1 et de dérivabilité D_2 de f .
2. a) Montrer que $\forall y \in [-1, 1], \arccos y + \arccos(-y) = \pi$.
b) Montrer que le graphe de f admet un point de symétrie Ω' que l'on déterminera.
3. Calculer la dérivée de f sur D_2 .
4. a) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}, x(2-x) = 1 - (x-1)^2$.
b) Montrer que : $\forall x \in]1, 2], f(x) = 2 \arccos(x-1) + c$, où c est une constante à déterminer.
c) En déduire l'expression de f en fonction de $\arccos(x-1)$ sur son domaine de définition D_1 .