

Devoir de synthèse d'Analyse- Semestre N°1 Section : P.T.1
--

Durée : 2h

Date : 06 Janvier 2016

Nbre de pages : 2

Exercice

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}.$$

1. a) Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x > 0$

$$g'(x) = \ln(x+2) - \ln(x) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}.$$

- b) Etudier le sens de variations de g' sur $]0, +\infty[$.

- c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x)$ et en déduire le signe de g' sur $]0, +\infty[$.

2. a) On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $a_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(a_n)$.

- b) En déduire que g est prolongeable par continuité en 0.

On notera par f son prolongement sur $[0, +\infty[$.

3. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $[0, +\infty[$?

4. a) En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $x > 0$

$$\frac{2}{x+2} < \ln(x+2) - \ln(x) < \frac{2}{x}.$$

- b) En déduire que f n'est pas bornée sur $[0, +\infty[$.

5. On définit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $U_0 = 4$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- a) Vérifier que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie sur $[0, +\infty[$.

- b) Déterminer la nature de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Problème

Partie 1

On considère les suites de nombres réels $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} P_0 = 1, \\ Q_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} P_{n+1} = P_n + 2Q_n, \\ Q_{n+1} = P_n + Q_n \end{cases}$$

1. Calculer P_1 et Q_1 .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n \geq Q_n > 0$.
3. On définit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $U_n = \frac{P_n}{Q_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Vérifier que $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = 1 + \frac{1}{x+1}$.
 - b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [1, 2]$.
 - c) Montrer que les suites $(U_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(U_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes.
 - d) En déduire que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.
4. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n \text{ et } Q_{n+2} = 2Q_{n+1} + Q_n.$$

- b) En déduire les expressions de P_n et Q_n en fonction de n .
- c) En déduire l'expression de U_n en fonction de n et retrouver sa limite.

Partie 2

On considère la suite de nombres réels $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$V_0 = 1, \text{ et } V_{n+1} = \frac{1}{2} \left(V_n + \frac{2}{V_n} \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie sur $[1, 2]$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|V_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2} |V_n - \sqrt{2}|$.
3. En déduire que la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

Partie 3

1. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes réels strictement positifs tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T_{n+1}}{T_n} = l < 1$ et k un réel vérifiant $l < k < 1$.
 - a) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq p$ on a $T_n \leq k^{n-p} T_p$.
 - b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 0$.
2. On définit la suite de nombres réels $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $T_n = \left| \frac{V_n - \sqrt{2}}{U_n - \sqrt{2}} \right|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n \neq 0$.
 - b) Exprimer T_{n+1} en fonction de U_n , V_n et T_n .
 - c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$.
3. Comparer la vitesse de convergence des suites $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$.