

Devoir de contrôle d'Analyse-Semestre N°1
Section : P.T.1

Problème

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f : x \mapsto \frac{1}{2} \arctan(sh(x)) \text{ et } g : x \mapsto \arctan(h(x)); \text{ avec } h(x) = \left(\frac{sh(x)}{1 + ch(x)} \right).$$

Partie 1 : Questions de Cours

Rappel : $\tan(2t) = \frac{2 \tan(t)}{1 - \tan^2(t)}$.

- Recopier, et compléter (pas de preuve exigée) :
 - $\forall t \in \mathbb{R}, \arctan(t) \in \dots$
 - $(\arctan(\tan(t)) = t) \Leftrightarrow (t \in \dots)$
 - $(\tan(\arctan(t)) = t) \Leftrightarrow (t \in \dots)$
 - La fonction $\arctan$ est strictement sur
 - $\forall t \in D, (\arctan \circ h)'(t) = \dots$, avec $D = \dots$
- Soit $t \in \mathbb{R}$, montrer que $ch^2(t) - sh^2(t) = 1$.

Partie 2 : $f = g$ via les dérivées

- Préciser et justifier le domaine de définition de f et de g .
- Préciser et justifier le domaine de dérivabilité de f et de g .
- Donner une expression simplifiée de f' et de g' (l'expression obtenue ne fera intervenir que la fonction ch).
- En déduire que $f = g$.

Partie 3 : $f = g$ en utilisant $\tan$

- Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $\tan(2f(x))$.
- En étudiant les variations de la fonction h , montrer que h est à valeurs dans $] -1, 1[$.
- Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\tan(2g(x)) = sh(x)$.
- En déduire que $f = g$.

Partie 4 : Equation différentielle linéaire du 1^{er} ordre

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y' - \frac{h(x)}{2} y = \frac{\sqrt{1 + ch(x)}}{ch(x)}.$$