

Devoir de synthèse d'Analyse-Semestre N°1
Section : P.T.1
Durée : 2h**Date : 11 Décembre 2017****Nbre de pages : 2****Exercice 1**

1. Soit $A - B$ l'ensemble définit par :

$$A - B = \{a - b; (a, b) \in A \times B\}.$$

avec A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$, vérifiant A est majorée et B est minorée.

- (a) Montrer que $A - B$ admet une borne supérieure.
 (b) Montrer que : $\sup(A - B) = \sup(A) - \inf(B)$.
2. En déduire de la question précédente que l'ensemble

$$F = \left\{ \arctan\left(\frac{m^2}{m+1}\right) - \ln(n); (n, m) \in (\mathbb{N})^2 \right\}$$

admet une borne supérieure **puis** calculer $\sup(F)$.

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_c) : r^2 - r - 2 = 0$.
 2. Résoudre l'équation différentielle :

$$(H) : y'' - y' - 2y = \ln(2x).$$

3. Exprimer le terme général de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 4, U_1 = 2, \\ U_{n+2} = U_{n+1} + 2U_n, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Problème

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de nombres réels **positifs** définie par :

$$\begin{cases} a_0 = 1, & a_1 = 2 \\ \text{et } a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 1$.
3. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.
4. On définit la suite de nombres réels $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$U_0 = 1, \quad \text{et} \quad U_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 1$.
- b Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.
- c Donner les limites possibles de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On se propose d'étudier la nature de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de deux manières différentes.

Partie 1

1. Dresser le tableau de variation de f sur $]0, +\infty[$.
2. Calculer les points fixes de $f \circ f$.
3. Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie sur $[1, 2]$.
4. Montrer que les suites $(U_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(U_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes.
5. En déduire que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

Partie 2

On définit les suites $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$X_n = a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2, \quad V_n = \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} \quad \text{et} \quad W_n = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = -X_{n-1}$.
En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = (-1)^n$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} W_n - V_n = \frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}} \\ V_{n+1} - W_n = \frac{-1}{a_{2n+1}a_{2n}} \\ W_{n-1} - V_n = \frac{1}{a_{2n-1}a_{2n-2}} \end{cases}$$

3. En déduire que les suites $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. et
4. Conclure que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.