

Devoir de Synthèse - 1^{er} Semestre
(Physique)

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements et enfin la propreté de la copie entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Sachez que si votre enseignant ne peut pas lire votre réponse, il ne peut pas corriger votre copie.

Bonne chance !

Exercice 1: Cinématique

Soit $\mathbb{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère absolu et $\mathbb{R}_1(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ le repère relatif qui tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe fixe Oz . Un point matériel M décrit dans le plan (xOy) un mouvement suivant la trajectoire de la figure 1.

La position du point M est repérée par les coordonnées polaires (ρ, φ) :

$$\rho = \frac{1}{2} \rho_0 (1 + \cos \varphi),$$

$$0 \leq \varphi = \omega t \leq 2\pi.$$

où t étant le temps et $\rho_0 = OA$ est une longueur donnée.

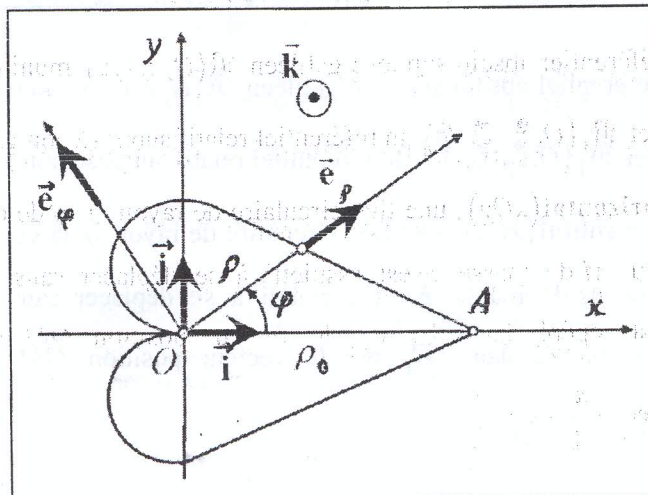


Figure 1

- 1) Démontrer que le vecteur vitesse de M dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ sous la forme :

$$\vec{v}_a(M) = \rho_0 \omega \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[-\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \vec{e}_\rho + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \vec{e}_\varphi \right]$$

- 2) a) Déterminer $\|\vec{v}_a(M)\|$ le module du vecteur vitesse $\vec{v}_a(M)$.

b) En déduire $\vec{T}$ le vecteur unitaire tangent à la trajectoire.

c) Montrer que :

$$\left(\vec{e}_\varphi, \vec{T} \right) = \frac{\varphi}{2}$$

- 3) Déterminer les vecteurs accélération tangentielle $\vec{\gamma}_T$ et normale $\vec{\gamma}_N$.

4) En déduire ρ_c le rayon de courbure de la trajectoire ainsi que $\vec{N}$ le vecteur unitaire normal à la trajectoire.

5) a) Déterminer l'expression de l'abscisse curviligne s de M comptée à partir du point A correspondant à $\varphi = 0$. On donne $s(\varphi = 0) = 0$.

b) En déduire la longueur totale de la trajectoire considérée.

6) a) Déterminer la vitesse relative $\vec{v}_r$ du point M par rapport à $\mathbb{R}_1$.

b) Déterminer la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$.

c) Déduire la vitesse absolue du point M .

Exercice 2: Dynamique non galiléenne

Soit un référentiel absolu supposé galiléen $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\mathcal{R}_1(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ un référentiel relatif supposé non galiléen.

Dans le plan horizontal (xOy) , une tige circulaire de rayon a et de centre C est maintenue fixe. Un anneau M de masse m est assujéti à se déplacer sans frottement sur la tige circulaire. Il est repéré dans $\mathcal{R}_1$ par le vecteur position $\overline{OM} = \rho \vec{e}_\rho = 2a \cos \varphi \vec{e}_\rho$ où

$$\varphi = \left(\vec{i}, \overline{OM} \right) \text{ avec } -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

L'anneau M est attaché à l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide a . L'autre extrémité du ressort est fixée au point O . En plus de la force de rappel $\vec{F}$ exercée par le ressort ($\vec{F} = -k(\rho - a)\vec{e}_\rho$), l'anneau M est soumis à son poids $\vec{P} = -mg\vec{k}$ et à la réaction de la tige $\vec{R}$. On désigne par $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{k})$ la base de Serret-Frenet comme l'indique la figure 2 ($\vec{N}$ est le vecteur unitaire dirigé vers le centre C de la tige circulaire).

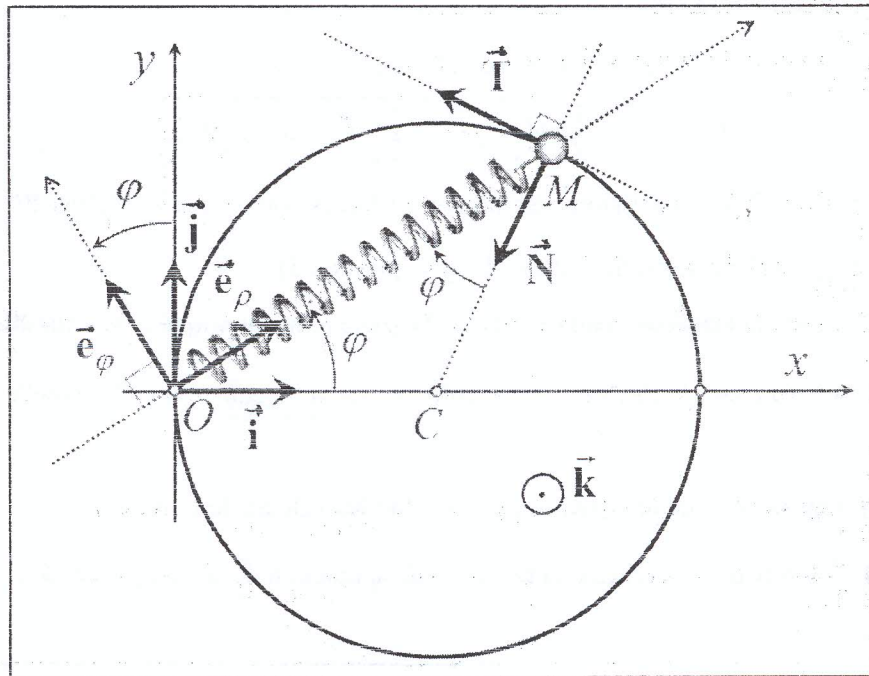


Figure 2

Faites attention ! Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base mobile $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$.

- 1) Déterminer $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ la vitesse de M par rapport à $\mathcal{R}$.
- 2) En déduire les expressions des vecteurs tangent $\vec{T}$ et normal $\vec{N}$ à la trajectoire au point M .
- 3) Déterminer $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}}$ la vitesse de rotation de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}$.
- 4) Déterminer les accélérations relative $\vec{\gamma}_r$, d'entraînement $\vec{\gamma}_e$ et de Coriolis $\vec{\gamma}_c$ de M .
- 5) Donner les expressions des forces appliquées à M dans $\mathcal{R}_1$.
- 6) Ecrire le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à M dans $\mathcal{R}_1$.
- 7) a) En projetant le PFD sur $\vec{T}$, établir l'équation différentielle du mouvement de M .

b) Que devient cette équation pour des faibles valeurs de l'angle φ .

8) En projetant le PFD sur $\vec{N}$ et $\vec{k}$, trouver les composantes de la réaction $\vec{R}$ de la tige sur M .

9) L'anneau M est maintenant attaché à l'extrémité d'un deuxième ressort de même raideur k et de même longueur à vide a . L'autre extrémité du deuxième ressort est fixée au point A (voir figure 3).

a) A partir de la figure 3, montrer que :

$$\overline{AM} = \sqrt{4a^2 - \rho^2} \vec{e}_\varphi = 2a \sin \varphi \vec{e}_\varphi$$

b) Donner les expressions des nouvelles forces appliquées à M dans $\mathcal{R}_1$ (ne pas donner les expressions des forces déjà citées dans la question 5).

c) Ecrire le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à M dans $\mathcal{R}_1$.

d) En projetant le PFD sur $\vec{T}$, Etablir la nouvelle équation différentielle du mouvement de M .

e) Que devient cette équation pour des faibles valeurs de l'angle φ .

f) Trouver les nouvelles composantes de la réaction $\vec{R}$ de la tige sur M .

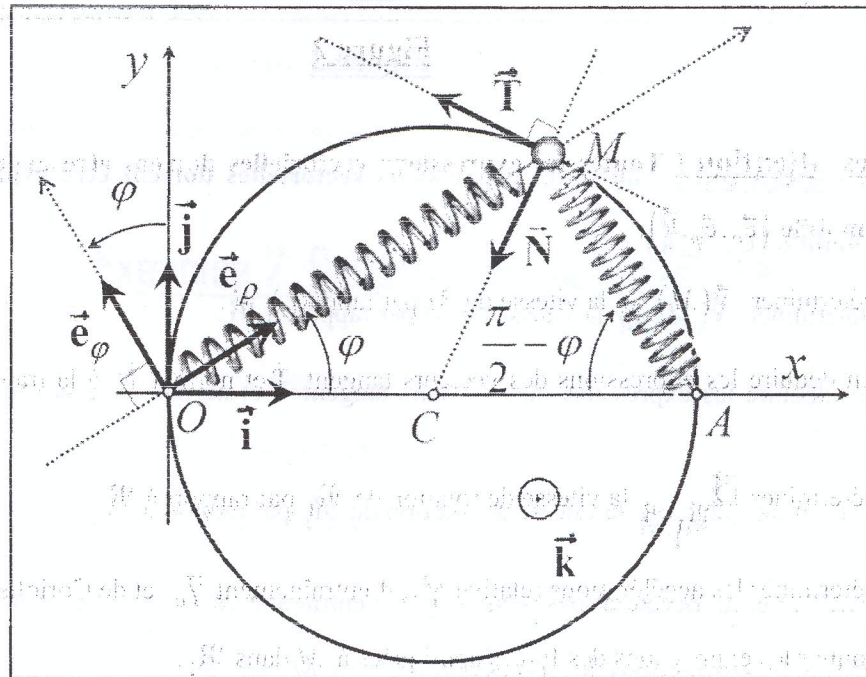


Figure 3

Fin