

Mécanique Générale PT1

Devoir de contrôle STA du 1^{er} semestre 27/10/2017, durée : 1h

Exercice 1 :

Soit $R(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ un repère orthonormé direct. On considère une plaque qui a la forme présentée dans la figure 1. Cette plaque est soumise à trois forces représentées par les vecteurs glissants $(A, \vec{F}_A)$, $(B, \vec{F}_B)$ et $(C, \vec{F}_C)$ tels que : $\vec{F}_A = F(\cos \alpha \bar{y} + \sin \alpha \bar{z})$, $\vec{F}_B = -F \bar{z}$ et $\vec{F}_C = F(\sin \beta \bar{x} + \cos \beta \bar{y})$.

Les points A, B, C sont dans le plan $(O, \bar{y}, \bar{z})$ et leurs coordonnées sont fonction de la distance a (voir figure 1). F et a sont deux réels strictement positifs, α et β deux angles dans $[0, \pi/2]$.

Soit (τ) le torseur associé à ces trois vecteurs glissants.

- 1) Déterminer les coordonnées du torseur (τ) au point O.
- 2) Discuter suivant les valeurs α et β la nature du torseur (τ) .

Dans la suite de l'exercice on prendra $\alpha = \beta = \pi/4$

- 3) Dans ce cas donner les coordonnées du torseur (τ) au point O puis déduire sa nature.
- 4) On veut annuler le torseur (τ) en ajoutant aux 3 vecteurs glissants précédents, un 4^{ème} vecteur glissant $(D, \vec{F}_D)$, déterminer si c'est possible ce vecteur glissant, sinon justifier votre réponse.

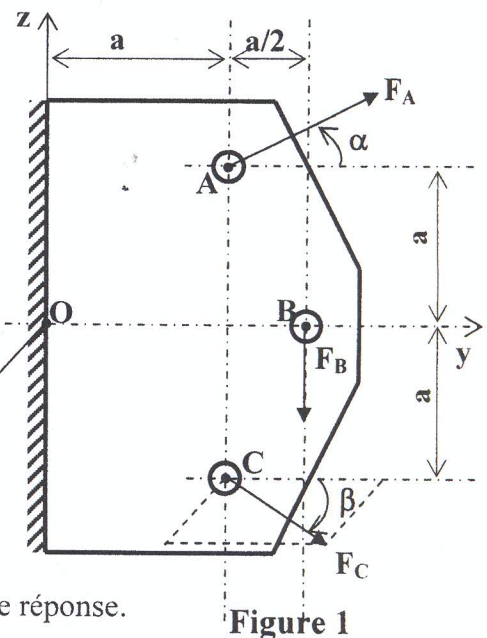


Figure 1

Exercice 2 :

L'espace affine euclidien réel orienté de dimension trois étant muni d'un repère direct $R(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

A tout point P de l'espace, on associe le champ $\vec{M}(P)$ dépendant du temps t donné par :

$$\vec{M}(P) \begin{pmatrix} 3(n-1)(n+1)Z - (4n-5)tY + t - 2 \\ (4n-5)tX - (n-1)(t-1)Z + (n^2-1) \\ (n^2-1)(t-1)Y - 2(n-1)X + 2n(t^2-1) \end{pmatrix}_R \quad \forall t \in [0, +\infty[$$

Où (X, Y, Z) sont les coordonnées de P et n est un paramètre réel.

1°/ Calculer $\vec{M}(O)$

2°/ Pour qu'elle valeur du paramètre n ?, le champ instantané (dépendant du temps t) $\vec{M}(P)$ est antisymétrique de vecteur $\vec{S}$ (dépendant du temps t) que l'on déduira.

Dans la suite, on suppose que $n=1$.

Soit (τ) le torseur associé au champ antisymétrique $\vec{M}(P)$.

3°) a) Ecrire les coordonnées de (τ) en O.

b) Déterminer les coordonnées du torseur dérivé $(\tau') = (d\tau/dt)$ en O (on suppose que les coordonnées de tous les points sont indépendantes du temps t)

c) Calculer le produit $\Pi = (\tau) \cdot (\tau')$ des 2 torseurs (τ) et (τ')

4°/ Discuter selon la valeur de t la nature torseur (τ) ,

5°/ a) Montrer que pour $t=2$, le torseur (τ) est quelconque.

b) Donner les décompositions canonique et centrale au point O, comparer les deux décompositions et conclure.

BONNE CHANCE

Devoir de contrôle du premier semestre
Automatique

Date : 27/10/2017. Durée : 1h 30mn.

Documents, Calculatrice et GSM non autorisés. Tables de Laplace fournies au verso.

Exercice 1

Soit le système linéaire, stationnaire et monovarié (d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$) de fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{(p+2)e^{-ap}}{(p+4)(p+8)}$$

- Calculer les pôles, les zéros, l'ordre n et le gain statique k du système.
- Donner l'équation différentielle entrée-sortie du système.
- Calculer la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système.
- Que représente le paramètre a ? Pour quelles valeurs de a le système est-il causal ? Justifier.

Exercice 2

Soit le système dynamique suivant :

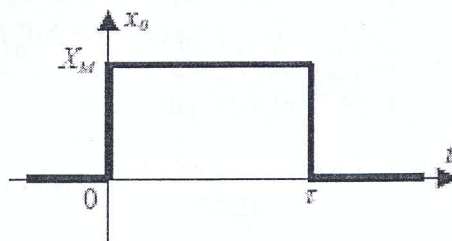
$$s''(t) + 3s'(t) + 2s(t) = 2e'(t) + 4e(t), \quad s(0) = 2, \dot{s}(0) = 0, e(0) = 0.$$

d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$.

- Ce système est-il physiquement réalisable (justifier) ?
- Evaluer la fonction de transfert $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$. Quel est l'ordre n et le gain statique k du système ?
- Calculer la réponse $s(t)$ à l'entrée causale $e(t) = u(t)$ (échelon unitaire) pour les conditions initiales données ?
- Sans calculer la réponse, quelle est la valeur finale de $s(t)$ pour l'entrée $e(t) = 2(1 - e^{-2t})u(t)$?

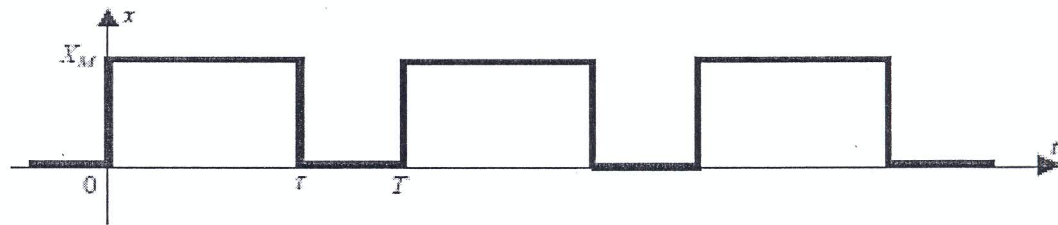
Exercice 3

- Calculer $X_0(p)$ la transformée de Laplace du signal suivant :



- par calcul direct,

- par construction graphique.
- b) En déduire $X(p)$ la transformée de Laplace du signal périodique suivant :



Exercice 4

Donner l'expression de la fonction de transfert $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ du schéma fonctionnel suivant :

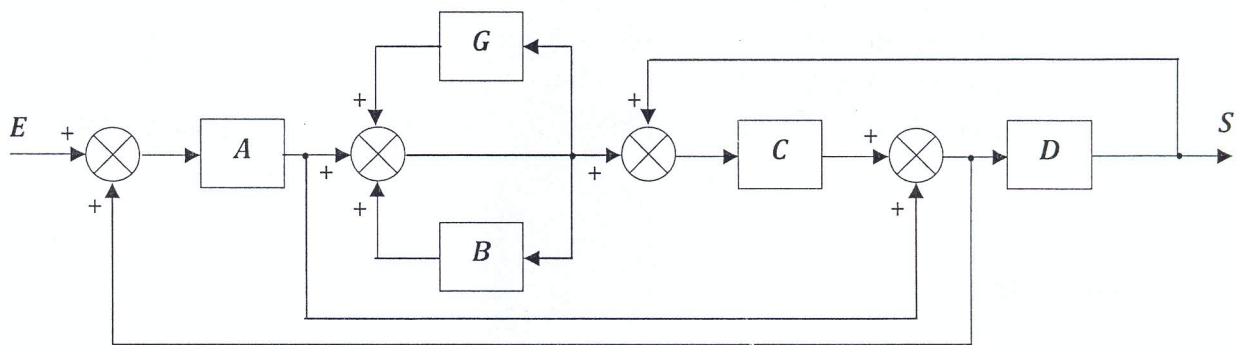


Table de la transformée de Laplace

$f(t)$	$F(p) = \mathcal{L}(f(t))$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{p}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{p+a}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(p+a)^n}$
$\sin(\omega t)u(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)u(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$

Propriétés de la transformée de Laplace

<u>linéarité</u>	$f_1(t) + kf_2(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F_1(p) + kF_2(p)$
<u>dérivation</u>	$\dot{f}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} pF(p) - f(0)$ $\ddot{f}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} p^2F(p) - pf'(0) - \dot{f}(0)$
<u>intégration</u>	$\int_0^{t \geq 0} f(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{F(p)}{p}$
<u>retard</u>	$f(t - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-\theta p} F(p)$
<u>valeur initiale</u>	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$
<u>valeur finale</u>	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$
<u>fonction périodique de période T</u>	$f(t) \mapsto F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T f(t)e^{-pt} dt$