

Devoir de synthèse d'Analyse-Semestre N°2 Section : P.T.1
--

Durée : 2h

Date : 22 Juin 2018

Nbre de pages : 2

Exercice

Soit f la fonction de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est impaire.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, $\frac{x}{\sqrt{1+16x^4}} \leq f(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer le signe de f' .
4. Dresser le tableau de variation de f .

Problème

On se donne dans ce problème la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Partie 1

1. (a) Calculer u_0
(b) Calculer $u_0 + u_1$ et en déduire la valeur de u_1 .
2. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{2n+2}$.
(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2n+2}$.
(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

Partie 2

Devoir de synthèse d'Analyse-Semestre N°2 Section : P.T.1
--

Durée : 2h

Date : 22 Juin 2018

Nbre de pages : 2

Exercice

Soit f la fonction de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est impaire.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, $\frac{x}{\sqrt{1+16x^4}} \leq f(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer le signe de f' .
4. Dresser le tableau de variation de f .

Problème

On se donne dans ce problème la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Partie 1

1. (a) Calculer u_0
 (b) Calculer $u_0 + u_1$ et en déduire la valeur de u_1 .
2. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{2n+2}$.
 (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2n+2}$.
 (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

Partie 2

1. (a) Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2(-1)^{n-1}u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2.$$

- (b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente et donner sa somme.

- (c) Etudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right)$.

2. (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{4(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx.$$

- (b) Montrer que $0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2} dx \leq \frac{1}{2n+4}$.

- (c) En déduire la limite de la suite $(n \cdot u_n)_n$ et trouver un équivalent de la suite $(u_n)_n$.

- (d) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

- (e) Qu'elle est la nature de la série $\sum_{n \geq 0} e^{u_n}$.