

DEVOIR DE SYNTHÈSE N 1

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la représentation.

Exercice I:

I. Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \rightarrow F$ une application. Pour toutes parties A et B de E :

1) Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

2) Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

3) On considère l'application

$$\begin{array}{ccc} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{ix} \end{array}$$

a) g est-elle injective, est-elle surjective, justifier.

b) Pour $A_1 = \{\pi, 2\pi\}$ et $B_1 = \{3\pi, 4\pi\}$, a-t-on $g(A_1) \cap g(B_1) \subset g(A_1 \cap B_1)$.

4) Montrer $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \iff f$ est injective.

II. Soit $f : E \rightarrow E$ vérifiant $f \circ f = f$.

1) Montrer que f est injective $\iff f$ est surjective.

2) Soit

$$\begin{array}{ccc} h : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{1}{2}(1 - i + z + iz) \end{array}$$

a) Calculer $h(1)$ et $h(i)$, h est-elle injective.

b) Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}, h \circ h(z) = h(z)$.

c) Dédurre que h n'est pas surjective.

III. Soit A une partie non vide de E et on considère l'application

$$\begin{array}{ccc} \varphi_A : E & \longrightarrow & E \\ X & \longmapsto & \overline{A} \Delta X \end{array}$$

on rappelle que $A \Delta X = A \cup X \setminus A \cap X$.

1) Calculer $\varphi_A(\emptyset), \varphi_A(\overline{A})$.

2) Calculer $\varphi_A \circ \varphi_A(X)$, $\forall X \in P(E)$.

3) Dédurre que φ_A est bijective et donner φ_A^{-1} .

Exercice II:

I) 1) Énoncer le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{C}[X]$.

2) Pour $n \geq 2$, montrer que le polynôme $Q_n = (X-4)^{n+1} + (X-5)^{2n} - 1$ est divisible par $(X-4)(X-5)$.

3) Pour $n \geq 2$, sans effectuer l'opération, déterminer le reste de la division euclidienne de $P_n = X^n + 2X - 2$ par $(X-1)^2$.

II) On considère le polynôme $P = X^5 - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

1) Déterminer les racines de P dans $\mathbb{C}[X]$ et écrire P sous la forme $P = \prod_{i=0}^4 (X - \alpha_i)$, où les α_i sont les racines de P .

2) a) Effectuer la division euclidienne de P par $X - 1$.

b) Dédurre les racines du polynôme $Q = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$ dans $\mathbb{C}$.

3) a) Vérifier que $\prod_{i=1}^4 (1 - e^{\frac{2ik\pi}{5}}) = 5$.

b) Dédurre alors que $\prod_{i=1}^4 \sin(\frac{k\pi}{5}) = \frac{5}{2^4}$.

III) Soit $E = \mathbb{R}[X]$, on définit la relation binaire R sur E par

$$A R B \iff (X - \sqrt{2}) \text{ divise } (A - B).$$

a) Vérifier que R est une relation d'équivalence sur E .

b) Déterminer la classe d'équivalences de 0 notée $cl(0)$.

c) Montrer que $cl(X^3 - X) = cl(X)$.

BON TRAVAIL