

Devoir de contrôle d'Analyse-Semestre N°1
Section : P.T.1

Problème

Partie 1 : Questions de Cours

Soit U une fonction réelle définie sur $D_{\text{def}}(U)$ et dérivable sur $D_{\text{dv}}(U)$. Recopier et compléter (pas de preuve exigée) :

1. La fonction $\arccos \circ U$ est définie sur D_1 et dérivable sur D_2 avec $D_1 = \{...\}$ et $D_2 = \{...\}$ et $\forall x \in D_2$, $(\arccos \circ U)'(x) = \dots$
2. La fonction $\arctan \circ U$ est définie sur D_1 et dérivable sur D_2 avec $D_1 = \{...\}$ et $D_2 = \{...\}$ et $\forall x \in D_2$, $(\arctan \circ U)'(x) = \dots$

Partie 2 :

Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

1. Montrer que le graphe de h admet un point de symétrie Ω que l'on déterminera.
2. Dresser le tableau de variation de h sur le domaine réduit $] -1, +\infty[$.
3. Calculer $h(0)$ et tracer le graphe de h sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dans un repère orthonormé.
4. Résoudre graphiquement l'inéquation $|h(x)| \leq 1$.

Partie 3 :

On considère la fonction $f : x \mapsto \arccos\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}_+$.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$.
3. Soit g la fonction définie par $g : x \mapsto \arctan(\sqrt{x})$.
 - (a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
 - (b) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $f(x) = 2 \arctan(\sqrt{x})$.

Partie 4 :

1. En remarquant que $\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$, déterminer $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$.
2. En déduire, à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{x}$, $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Calculer, avec une intégration par parties bien choisie, une primitive de la fonction f .
4. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle :

$$(E) : y' - \frac{y}{2x} = \frac{1}{1+x} + 2\sqrt{x} \arctan(\sqrt{x}).$$