

DEVOIR DE CONTRÔLE

Exercice I:

On considère $B_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $h \in L(\mathbb{R}^3)$ définie par:

$$\begin{aligned} h(e_1) &= -2.e_1 + 2.e_3 \\ h(e_2) &= -e_1 + e_3 \\ h(e_3) &= 4.e_2 \end{aligned}$$

1. Déterminer une base de $Im(h) = \text{vect} (h(e_1) , h(e_2) , h(e_3))$, h est-elle surjective?
2. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $h(x, y, z)$.
3. Déterminer une base de $ker(h)$.
4. Montrer que $\mathbb{R}^3 = ker(h) \oplus Im(h)$.

Exercice II:

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère les applications suivantes:

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ P &\longmapsto P - P' \\ \\ g : E &\longrightarrow E \\ P &\longmapsto P' \end{aligned}$$

1. Montrer que f et g sont deux endomorphismes de E .
2. Cas $n = 3$. Soit $B = (1, X, X^2, X^3)$
 - (a) Soit $H = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ une famille de E qui vérifie : $deg(P_k) = k$, $0 \leq k \leq 3$. Montrer que H est une base de E .
 - (b) Donner l'image de la base B par f .
 - (c) Dédire que f est bijective.
 - (d) Déterminer $ker(f)$.
 - (e) Donner une base de $Im(f)$.
 - (f) Retrouver que f est bijective.
3. Cas $n \in \mathbb{N}^*$ un entier quelconque. Posons $\varphi = Id_E + g + g^2 + \dots + g^n$.
(On rappelle que $g^0 = Id_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $g^k = g^{k-1} \circ g = g \circ g^{k-1}$).
 - (a) Calculer $g^{n+1}(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
 - (b) Montrer que $\varphi \circ (Id_E - g) = (Id_E - g) \circ \varphi = Id_E - g^{n+1}$.
 - (c) Dédire que f est un isomorphisme de E et donner f^{-1} . (Remarque que $f + g = Id_E$).

BON TRAVAIL