

DEVOIR DE SYNTHESE N2

Exercice I:

Répondre par vrai ou faux avec justification

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$;

1. La somme de deux matrices inversibles est une matrice inversible
2. Si ${}^tA = 2A$ alors $\det(A) = 2$
3. Si $A^2 + A = I_n$ alors A est inversible
4. Si $\det(A) = 1$ alors $A = I_n$

Exercice II:

On considère l'application ;

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x - y, y - z, x + z)$$

1. Montrer que f est linéaire
2. Déterminer $M = \text{mat}(f, B_c)$ où B_c est la base canonique de $\mathbb{R}^3$
3. Montrer que f est bijective
4. Déterminer $f^{-1}((x, y, z))$

Problème

Soit l'endomorphisme $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ ($n \geq 2$), dont la matrice relativement à la base canonique $B_c = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ avec : $a_{ii} = n$, et $a_{ij} = 1$ si $i \neq j$

$$A = \begin{pmatrix} n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & n & 1 \\ 1 & \dots & 1 & n \end{pmatrix}.$$

★ But★ : Chercher une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de g est diagonale

Partie I

Cas $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

1. En utilisant la méthode de Gauss, transformer A en une matrice triangulaire supérieure
2. Calculer $\det(A)$
3. Dédire que A est inversible

Partie II

Cas $n \geq 2$ un entier quelconque

1. Calculer $\det(A)$.
2. Déduire que g est bijective
3. Posons $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$; (chaque composante de v_1 est égale 1)

Calculer Av_1 en fonction de n et v_1

4. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$.

On considère le système linéaire suivant

$$(S) : AX = (n-1)X$$

- a. Montrer que : X est une solution de $(S) \iff x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$
- b. Déduire que les vecteurs $v_k = -e_1 + e_k$, $2 \leq k \leq n$, sont des solutions de (S)
5. On note $F = \ker(A - (n-1)I_n)$
 - a. Déterminer $\operatorname{rg}(A - (n-1)I_n)$
 - b. Déduire $\dim(F)$
6. Montrer que $B_1 = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, (ind : calculer $\det_{B_1}(v_1, v_2, \dots, v_n)$)
7. Déterminer $A' = \operatorname{mat}(g, B_1)$ (on dit que g est diagonalisable)

Barème :

ex1 : 4 pts (1;1;1;1)

ex2 : 5 pts (1;1;2;1)

ex3 : 11 pts (I : 1;1;0.5 II : 1;0.5;1;1;1;1;1;1)

    B O N T R A V A I L    