

Devoir de Contrôle 2 : **Analyse**
Durée : 1H

N.B : Aucun document n'est autorisé et l'usage du calculatrice est interdit.

Problème :
Partie I

Soit $0 < a < b$. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \ln(ax + b(1-x)) - \ln(a)x - \ln(b)(1-x).$$

1. Donner le domaine de définition Df de f .
2. (a) Soient $\alpha \in \mathbb{R}^*, \beta \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\frac{1}{\alpha x + \beta} \right)^{(n)} (x) = \frac{(-1)^n n! \alpha^n}{(\alpha x + \beta)^{n+1}}$$

- (b) En déduire que f est de classe C^∞ sur Df et donner l'expression de f' et $f^{(n)}$ pour tout $n \geq 2$.

3. Montrer que

$$\frac{b-a}{b} < \ln(b) - \ln(a) < \frac{b-a}{a}.$$

4. En déduire que $f'(0) > 0$ et $f'(1) < 0$.
5. En déduire qu'il existe un unique point $x_0 \in]0, 1[$, tel que $f'(x_0) = 0$.

Partie II

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

1. Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I qu'on déterminera.
On note h sa fonction réciproque.
2. Montrer que pour tout $x \in I$, $h(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$.
3. Justifier la dérivabilité de h sur I et calculer sa dérivée.

4. En utilisant la question 2)a) de la partie I, déduire la dérivée d'ordre n de la fonction $\frac{1}{1-x}$.
5. En écrivant $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right)$, déduire que pour tout $x \in I$, la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de h , est donnée par :

$$h^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{2} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{(1+x)^n} + \frac{1}{(1-x)^n} \right).$$

6. Ecrire la formule de Mac-Laurin de h en tout point $x \in I \setminus \{0\}$, à l'ordre $n \in \mathbb{N}$.
7. Déduire que pour tout $x \in]0, 1[$,

$$h(x) > x + \frac{x^3}{3}.$$
