

Devoir de contrôle N°2

Durée : 1h

Epreuve : Analyse

Problème :

Partie I : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $I = [a, b]$.

On considère la fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $g(I) \subset I$ et il existe une constante $k \in [0, 1[$ pour laquelle on ait $\forall (x, y) \in I^2, |g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$.

1. (a) Justifier que g est continue.
(b) Montrer que l'équation $g(x) = x$ possède une solution dans l'intervalle I puis que celle-ci est unique. On la notera c .
2. Soit $t \in I$ et $(x_n)_n$ la suite définie par : $x_0 = t$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = g(x_n)$.
(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, |x_n - c| \leq k^n |t - c|$.
(b) En déduire que la suite $(x_n)_n$ est convergente et trouver sa limite.

Partie II : On se donne $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 vérifiant $f(a) < 0, f(b) > 0$ et $\forall x \in [a, b], f'(x) > 0$.

1. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution c appartenant à $]a, b[$.
(b) Pour $x_0 \in [a, b]$, déterminer l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe de f en x_0 .

On s'intéresse dans ce qui suit à construire une suite $(x_n)_n$ d'éléments dans $[a, b]$ qui converge vers c .

2. Pour tout $x \in [a, b]$, on pose $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.
(a) Justifier que g est de classe C^1 sur $[a, b]$.
(b) Calculer $g(c)$ et $g'(c)$.
(c) En déduire que $\lim_{x \rightarrow c} |g'(x)| = 0$, puis, qu'il existe $\alpha > 0$, tel que, en notant $I = [c - \alpha, c + \alpha]$, on ait pour tout $x \in I, |g'(x)| < 1$.
(d) En déduire que $\forall x \in I, |g(x) - c| \leq |x - c|$, puis, que $\forall x \in I, g(x) \in I$.
(e) Montrer que la fonction $|g'|$ est bornée et atteint ses bornes sur I , puis, qu'il existe k dans $[0, 1[$ tel que pour tout $x \in I, |g'(x)| \leq k$.
3. En déduire que pour tout $t \in I$, la suite $(x_n)_n$ définie par : $x_0 = t$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers c .
4. On suppose de plus que g est de classe C^2 sur $[a, b]$.

Montrer que, si pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n \neq c$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - c}{(x_n - c)^2} = \frac{g''(c)}{2}$.

(Indication : Appliquer à g la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 sur $[x_n, c]$ et sur $[c, x_n]$).