

Devoir de contrôle N°2

Durée : 1h

Epreuve : Analyse

Problème

On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in [0, +\infty[$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie 1

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
3. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.
4. On admet qu'au voisinage de 0, on a : $e^x - 1 - xe^x = -\frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ où $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$.
Déduire que f' tend vers $-\frac{1}{2}$ en 0.
5. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

Partie 2

1. Vérifier que pour tout $x > 0$, $f''(x)$ s'écrit sous la forme : $f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3} g(x)$, où
$$g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2.$$
2. Calculer g' et g'' . En déduire le signe de f'' sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0, 1]$.

Partie 3

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

1. (a) Montrer que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$.
(b) En déduire que f admet au moins un point fixe α dans $[0, 1]$.
2. (a) Montrer que pour tout $x, y \in [0, 1]$, $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$.
(b) En déduire que α est unique.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
4. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.