

Devoir de synthèse d'Analyse-Semestre N°1

Section : P.T.1

Durée : 2h

Date : 20 Mai 2022

Nbre de pages : 2

Exercice

On considère la fonction f définie au $\mathcal{V}(0) \setminus \{0\}$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(1 - 2x \sin(x))}{x^2}.$$

1. (a) Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de f .
 (b) Justifier que f admet un prolongement par continuité en 0, noté toujours f .
 (c) Vérifier que f est dérivable en 0 et trouver $f'(0)$.
 (d) Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 et déterminer sa position par rapport à la courbe de f au voisinage de ce point.
2. Soit $(U_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par son terme général :

$$U_n = \ln \left(1 - \frac{\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)}{2^{n-1}} \right) + \frac{2}{4^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(a) Vérifier que $U_n \sim \frac{-5}{3(16)^n}$.

(b) Montrer que pour $q \in]-1, 1[$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1}{1-q}$.

- (c) On admet que : si $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ sont deux suites à termes réels de signe constant à partir d'un certain rang, vérifiant $X_n \sim Y_n$, alors les suites $\left(\sum_{k=n_0}^n X_k \right)_n$ et $\left(\sum_{k=n_0}^n Y_k \right)_n$ ont la même nature.

Etudier, alors, la nature de la suite $\left(\sum_{k=0}^n U_k \right)_n$.

Problème

Soit G la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad G(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t} dt.$$

Partie 1

- Vérifier qu'on peut réduire le domaine d'étude de G à $]0, +\infty[$. Dans la suite du problème, H désigne la restriction de G à $]0, +\infty[$ et on note : $H = G|_{]0, +\infty[}$
- Soit $\mathcal{E}$ la fonction définie par :

$$\mathcal{E} : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{t^2} \int_0^t \frac{\sin(u)(t-u)^2}{2} du.$$

- En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, appliquée à la fonction cosinus, entre 0 et t , prouver que : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\cos(t)}{t} = \frac{1}{t} - \frac{t}{2} + t\mathcal{E}(t)$.
 - Déduire que la fonction $\mathcal{E}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et admet un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}_+$ qu'on note toujours $\mathcal{E}$.
- Montrer que : $\exists M > 0$ tel que $\forall t \in [0, 1], \quad \left| \overbrace{-\frac{1}{2} + \mathcal{E}(t)}^{f(t)} \right| \leq M$.
 - En déduire que : $\forall x \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \quad \left| \int_x^{3x} \left(-\frac{t}{2} + t\mathcal{E}(t) \right) dt \right| \leq 4Mx^2$.
 - En déduire que H tend vers $\ln(3)$ quand x tend vers 0 et que H admet un prolongement par continuité en 0 qu'on note toujours H .

Partie 2

- Montrer que H est de classe C^1 sur $I = \mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée H' sur I .
 - Trouver le développement limité de H au voisinage de 0 à l'ordre 2.
 - En déduire que H est de classe C^1 en 0 et donner l'expression de H' sur $\mathbb{R}_+$.
- Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad H(x) = \frac{\sin(3x)}{3x} - \frac{\sin(x)}{x} + \overbrace{\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt}^{g(x)}$.
 - Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{3x} - \frac{1}{x} \leq g(x) \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{3x}$.
 - En déduire la limite de $H(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
- Montrer que pour tout $x, y \in]0, +\infty[, \quad H(y) - H(x) = \int_{3x}^{3y} \frac{\cos(t)}{t} dt - \int_x^y \frac{\cos(t)}{t} dt$.
 - En déduire les variations de H sur $\mathbb{R}_+^*$.

Rappel et Indication :

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right),$$

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) \text{ et}$$

$$\mathbb{R}_+^* = \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right] \right) \cup \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left[\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \frac{5\pi}{2} + 2k\pi \right] \right).$$