

Section : PT1

Date : 22-10-2022

Matière : Algèbre

Durée : 1 heure

Devoir de Contrôle N° 01

☞ L'usage de calculatrices est interdit.

☞ Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation.

Exercice 1

1. Considérons dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Expliciter la matrice D telle que $M = D + N$.

(b) Montrer que N est nilpotente et donner son indice de nilpotence .

(c) Calculer $M^n \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = A$.

Montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $A^p B - BA^p = p \cdot A^p$.

Exercice 2

Partie I :

Soient n et p deux entiers naturels non nuls tels que $n \geq p$.

1. Montrer que $\sum_{j=p}^n C_j^p = C_{n+1}^{p+1}$. (Indication : utiliser la récurrence sur n)

2. Calculer $\sum_{k=0}^n C_n^k$.

3. En déduire la somme suivante : $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} C_j^i$.

Partie II :

1. Calculer $\prod_{k=1}^n 2^{\frac{1}{k(k+1)}}$.

2. Calculer la somme $S_n = \sum_{k=1}^n k 2^k$.

3. Soit $T_n = \sum_{k=0}^n \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

(a) En utilisant le changement d'indice $j = n - k$, donner une autre expression de T_n .

(b) Calculer la valeur de $2T_n$.

(c) En déduire la valeur de T_n .