

Examen d'Algèbre - Semestre N°1 Section : P.T.1
--

Durée : 2h

Date : 02 Janvier 2023

Nombre de pages : 2

- L'usage de calculatrices est interdit.
- Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation.

Exercice 1

Soit E un ensemble non vide et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Soit l'application

$$f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B), \quad X \longmapsto (X \cap A, X \cap B)$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit bijective. Donner dans ce cas la bijection réciproque.

Problème :**Partie 1 :**

1. Soit la matrice $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $m_{ij} = 1$ pour tous $1 \leq i, j \leq 3$.
 - (a) Ecrire la matrice M et vérifier que $M^2 = 3M$.
 - (b) Déduire M^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

$$2. \text{ Soit } N \text{ une matrice de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ telle que } N = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- (a) Déterminer les réels a et b qui vérifient $N = aI_3 + bM$.
- (b) Calculer $N^n \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- (c) Montrer que N est inversible et déterminer N^{-1} .

3. On considère le système linéaire suivant :

$$(S) : \begin{cases} 3x + y + z = 2 \\ x + 3y + z = 4 \\ x + y + 3z = -2 \end{cases}$$

- (a) Montrer que (S) est un système de Cramer.
- (b) Résoudre le système (S) .

Partie 2 :

Considérons sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la relation binaire $\mathcal{R}$ définie comme suit :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad A\mathcal{R}B \iff \exists P \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } B = P^{-1}AP.$$

- 1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
- 2. Calculer $cl(I_n)$.
- 3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $A\mathcal{R}B$ alors $A^n\mathcal{R}B^n$.