

Devoir de contrôle d'Analyse-Semestre N°1
Section : P.T.1

Problème

On définit la fonction tangente hyperbolique, notée th , par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$$

Partie 1

1. Justifier que th est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que : $\forall x \in \mathbb{R}, th'(x) = \frac{1}{ch^2(x)}$.
2. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, th(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.
3. En déduire le tableau de variation de th , et préciser les limites aux bornes.
4. Montrer que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser.

On note $argth$ sa réciproque.

5. Etudier la parité de $argth$.
6. (a) Exprimer th' en fonction de th .
(b) Démontrer que $argth$ est dérivable sur I , puis, montrer que :

$$\forall x \in I, argth'(x) = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Partie 2

Soit h la fonction définie par $x \mapsto h(x) = argth\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|1-x| < |1+x|$.
(b) En déduire le domaine de définition et le domaine de dérivabilité de h .
2. Calculer la dérivée de h .
3. En déduire une expression simplifiée de h .

Partie 3

On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$, $\forall x \in I$.

1. (a) Simplifier $th(g(x))$, $\forall x \in I$.
(b) En déduire l'expression logarithmique de $argth$.
2. Retrouver l'expression simplifiée de h .