

Devoir de synthèse d'Analyse-Semestre N°1
Section : P.T.1
Durée : 2h**Date : 05 Janvier 2023****Nbre de pages : 2****Exercice 1**

On admet que si A et B sont deux parties non vides de $\mathbb{R}$ vérifiant $A \subset B$ et B est minorée alors A est minorée et $\inf(A) \geq \inf(B)$.

1. Soient A et B deux parties non vides et minorées de $\mathbb{R}$, et on définit l'ensemble suivant :

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Montrer que $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$.

2. Déterminer, si elle existe, la borne inférieure des ensembles :

(a) $D = \left\{ \frac{(-1)^n}{n}; n \in \mathbb{N}^* \right\}.$

(b) $E = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{p}; n, p \in \mathbb{N}^* \right\}.$

(c) $F = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n}; n \in \mathbb{N}^* \right\}.$

3. Que peut-on conclure des questions 2b et 2c ?

Exercice 2

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y'' + \frac{2}{x}y' - y = \frac{-2 \sin x}{x}, \quad x \in]0, +\infty[.$$

1. En posant $z(x) = xy(x)$, montrons que y est une solution de (E) si et seulement si z est une solution de l'équation :

$$(E') : z'' - z = -2 \sin x.$$

2. Déterminer alors l'ensemble de solutions de (E) .

Problème

L'objectif principal de ce problème est d'étudier, avec trois méthodes différentes, la nature de la suite récurrente $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 \in \mathbb{R}_+^*, \\ U_{n+1} = \frac{1}{2} \left(U_n + \frac{2}{U_n} \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Les trois parties de ce problème sont indépendantes : vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous voulez.

Partie 1 : Méthode 1

On note par f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$.

1. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Etudier sur $\mathbb{R}_+^*$ le signe de la fonction $h : x \mapsto h(x) = f(x) - x$.
3. Montrer, qu'à partir du rang 1, la suite (U_n) est bien définie sur $[\sqrt{2}, +\infty[$.
4. Montrer que (U_n) est convergente.
5. En déduire la limite de la suite (U_n) .

Partie 2 : Méthode 2

On note par $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite définie par : $V_n = \frac{U_n - \sqrt{2}}{U_n + \sqrt{2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = (V_0)^{2^n}$ et vérifier que la suite (V_n) converge vers 0.
3. En déduire la limite de la suite (U_n) .

Partie 3 : Méthode 3

On suppose dans cette partie que $U_0 \in [1, 2]$.

1. Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie sur $[1, 2]$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1}^2 - 2 = \frac{(U_n^2 - 2)^2}{4U_n^2}$.
3. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $U_n \geq \sqrt{2}$.
4. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\frac{U_n + \sqrt{2}}{U_n} \leq 2$.
5. En déduire, des questions précédentes, que pour tout $n \geq 1$, $|U_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2} |U_n - \sqrt{2}|$.
6. Déduire que pour tout $n \geq 1$, $|U_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |U_1 - \sqrt{2}|$.
7. Calculer la limite de la suite (U_n) .