

Devoir de contrôle d'Algèbre - Semestre N°2
Section : P.T.1
Durée : 1h**Date : 25 Février 2023****Nombre de pages : 2**

- L'usage de calculatrices est interdit.
- Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation.

Exercice 1

On donne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On considère deux sous ensembles de E donnés par :

$$F = \{P = aX + b \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } a, b \in \mathbb{R}\}$$

et

$$G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \text{ tel que } P(1) = P'(1) = 0\}.$$

1. Montrer que F et G sont deux sous espaces vectoriels de E .
2. Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$.

Problème

Dans tout le problème, soit $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Partie 1 :

1. On considère le polynôme $P_n(X) = X^{n+2} - X^n - 2X + 2$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (a) Montrer que 1 est une racine double de P_n .
 - (b) Dédire qu'il existe un polynôme $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ telque $P_n(X) = (X - 1)^2 Q_n(X)$.
 - (c) Factoriser $P_{n+1} - P_n$. Dédire une factorisation de $Q_{n+1} - Q_n$.
2. Factoriser $P_2(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Soit $F(X) = \frac{1}{P_2(X)}$ une fraction rationnelle dans $\mathbb{C}(X)$.
Décomposer $F(X)$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

Partie 2 :

Dans cette partie, on désigne par $A_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

1. Vérifier que $A'_{n+1} = A_n$ puis donner l'expression de $A_n - A'_n$.
2. Dédire que toutes les racines de A_n sont simples.