

Devoir de synthèse d'Algèbre - Semestre N°2 Section : P.T.1
--

Durée : 2h

Date : 15 Mai 2023

Nombre de pages : 2

- L'usage de calculatrices est interdit.
- Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation.

Problème 1

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E . On rappelle que $f^p = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{p \text{ fois}}$.

On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$, s'il existe $a \in E$ qui vérifie les trois conditions suivantes :

- $f^p(a) = a$.
- La famille $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est génératrice de E .
- La famille $(a, f(a), \dots, f^{p-1}(a))$ est constituée d'éléments deux à deux distincts.

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de f relativement à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Calculer $f(e_1)$ et $f^2(e_1)$.
 (b) Vérifier que $B' = (e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. (a) Vérifier que $f^3(e_1) = e_1 - 2e_2$.
 (b) Déterminer les coordonnées de $f^3(e_1)$ dans la base B' .
 (c) Donner $M = \text{mat}(f, B')$, la matrice de f dans la base B' .
3. Déterminer la matrice de f^4 dans la base B' , puis déduire que $f^4 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$.
4. Déduire que f est cyclique d'ordre 4.

Problème 2

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $B = (1, X, X^2)$ sa base canonique. On considère l'application f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\longmapsto (P(1) + P(-1))X^2 + (P(1) - P(-1)) \end{aligned}$$

1. (a) Montrer que f est un endomorphisme de E .
(b) Donner $A = \text{mat}(f, B)$.
(c) Déterminer $\text{Ker}(f)$ et donner une base B_1 de $\text{Ker}(f)$.
(d) L'application f est-elle surjective? Justifier.
2. Compléter la base B_1 pour obtenir une base B' de E .
3. On pose $B_2 = (2, 2X + 1, X^2 - 1)$ une base de E .
(a) Donner P la matrice de passage de B à B_2 .
(b) Calculer P^{-1} .
(c) Donner $D = \text{mat}(f, B_2)$, la matrice de f dans la base B_2 .
4. Déterminer H le sous-espace vectoriel de E tel que H est le supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans E .
5. Soit p la projection sur H parallèlement à $\text{ker}(f)$. Déterminer $p(Q_1)$ et $p(Q_2)$ avec $Q_1 = X + 2$ et $Q_2 = X^2 - 1$.

Bon courage.