

Devoir de contrôle N°2

Durée : 1h

Epreuve : Analyse

Problème :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}, \quad \forall x \in]0, +\infty[.$$

Partie I :

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité qu'on note toujours f .
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
3. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.
4. (a) Montrer que $\forall x > 0$, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.
(b) En déduire les variations de f sur $[0, +\infty[$.
5. (a) Montrer que $\forall x > 0$, $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
(b) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
6. Montrer que f admet au moins un point fixe $\alpha \in [0, 1]$.

Partie II : On considère la fonction ψ définie par

$$\psi(x) = x - (1+x)\ln(1+x) + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

1. Calculer ψ' et en déduire le signe de ψ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Vérifier que ψ et $f' + \frac{1}{2}$ ont le même signe.
3. En déduire que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$, $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$.
4. En déduire que f admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}_+$.

Partie III : On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 \in \mathbb{R}_+, \\ U_{n+1} = f(U_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer que $U_n \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$.
3. En déduire que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.