

Devoir de synthèse d'Analyse-Semestre N2
Section : P.T.1

Durée : 2h

Date : 19 Mai 2023

Nbre de pages : 2

Exercice

Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

1. Montrer que F est définie sur $I =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
2. Montrer que F est de classe C^1 sur I , puis que,

$$F'(x) = \frac{x-1}{\ln x}, \quad \forall x \in I.$$

3. Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$ et pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$\frac{x(x-1)}{2 \ln x} \leq F(x) \leq \frac{x(x-1)}{\ln x}.$$

4. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

5. Soit H la fonction définie par $H(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t}$, $\forall x \in I$.

(a) Montrer que pour tout $x \in I$, $H(x) = \ln 2$.

(b) En remarquant que $\frac{1}{\ln t} = t \frac{1}{t \ln t}$, montrer que :

$$\begin{cases} x \ln 2 \leq F(x) \leq x^2 \ln 2 & \text{pour tout } x \in]0, 1[\\ x^2 \ln 2 \leq F(x) \leq x \ln 2 & \text{pour tout } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

(c) En déduire $\lim_{x \rightarrow 1} F(x)$.

6. Conclure que la fonction F admet un prolongement par continuité en $x = 0$ et en $x = 1$ qu'on note toujours par F .
7. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

Problème

On considère la fonction f définie sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par :

$$f(x) = \ln \left(\tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right).$$

Partie 1

1. Montrer que f est impaire.
2. Montrer que f est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{1}{\cos x}$.
3. En déduire que f réalise une bijection de I dans un intervalle J que l'on déterminera.
4. Trouver le développement limité de la fonction f' à l'ordre 4 au voisinage de 0 et déduire que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{24} + o(x^5).$$

5. Soit f^{-1} la fonction réciproque de f .
 - (a) Montrer que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 5 en 0.
 - (b) Déterminer le développement limité de f^{-1} à l'ordre 5 au voisinage de 0.
 - (c) Donner l'équation de la tangente à la courbe de f^{-1} au point d'abscisse 0 et déterminer sa position par rapport à la courbe de f^{-1} au voisinage de ce point.

Partie 2

Soit ψ la fonction définie au voisinage de l'infinie ($\pm\infty$) par :

$$\psi(x) = \frac{x}{\ln \left(\tan \left(\frac{1}{2x} + \frac{\pi}{4} \right) \right)} - x^2.$$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction :

$$g : x \mapsto g(x) = \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{x}.$$

2. Trouver la position de la courbe de ψ par rapport à ses asymptotes au voisinage de l'infinie ($\pm\infty$).