



Devoir de Contrôle d'Algèbre N°1
Section: PT1

Durée: 1h

Date: Novembre 2023

Nbre de pages: 2

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il est rappelé que tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice 1 :

Pour tous entiers naturels non nuls n et p , on définit

$$S_p(n) = \sum_{k=1}^n k^p.$$

1. Rappeler les expressions de $S_0(n)$, $S_1(n)$ et $S_2(n)$ en fonction de n .

2. (a) Montrer que $\sum_{k=1}^n (k+1)^{p+1} = S_{p+1}(n) + (n+1)^{p+1} - 1$.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Développer l'expression de $(k+1)^{p+1}$.

(c) En déduire que $\sum_{k=1}^n (k+1)^{p+1} = S_{p+1}(n) + \sum_{j=0}^p C_{p+1}^j S_j(n)$.

(d) Montrer que $S_p(n) = \frac{1}{p+1} \left((n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{j=0}^{p-1} C_{p+1}^j S_j(n) \right)$.

Exercice 2 :

Soit $n \geq 2$ un entier. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et 0_n la matrice nulle. On rappelle qu'une matrice N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **nilpotente** s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^k = 0_n$. En outre, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne par ${}^t A$ la matrice transposée de A .

1. Soit A une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que, pour tout réel α , la matrice αA est nilpotente.

(b) Montrer que ${}^t A$ est nilpotente.

(c) Montrer que, pour tout entier naturel non nul p , A^p est nilpotente.

2. Soient B et C deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(CB)^k = C(BC)^{k-1}B$.

(b) Déduire que si BC est une matrice nilpotente, alors CB est nilpotente.

3. Soit $D = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Rappeler D^k , pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que, D est nilpotente, si et seulement si, $D = 0_n$.

4. On admet le résultat suivant :

Toute matrice symétrique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $A = PDP^{-1}$,
où P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A = PDP^{-1}$ une telle matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Vérifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = PD^k P^{-1}$.

(b) Montrer que, A est nilpotente, si et seulement si, $A = 0_n$.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, où a , b et c sont des nombres réels.

- (a) Justifier que A^2 est une matrice symétrique.
- (b) Montrer que si A est nilpotente, alors A est nulle.

IPES-BIB