

Devoir de Synthèse d'algèbre N°1
Section PT1

Durée 2h

Date Janvier 2024

Nombre de page :2



La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il est rappelé que tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice 1

I) Soient E et F deux ensembles non vides, A une partie de E et B une partie de F. Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

- 1) Montrer que $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$
- 2) Montrer que $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$
- 3) Montrer que f est injective $\Leftrightarrow f^{-1}(f(A)) = A$
- 4) Montrer que f est surjective $\Leftrightarrow f(f^{-1}(B)) = B$

5) On note $f_1 : P(E) \rightarrow P(F)$ et $f_2 : P(F) \rightarrow P(E)$ deux applications.

$$A \rightarrow f_1(A) \quad B \rightarrow f_2^{-1}(B)$$

Montrer que

- a) f est injective $\Leftrightarrow f_1$ est injective $\Leftrightarrow f_2$ est surjective
- b) f est surjective $\Leftrightarrow f_1$ est surjective $\Leftrightarrow f_2$ est injective

II) On définit la relation binaire sur $P(E)$ par :

$$\forall X, Y \in P(E), XRY \Leftrightarrow X \cap A = Y \cap A \text{ ; avec } A \text{ une partie non vide de } E.$$

- 1) Montrer que R est une relation d'équivalence sur $P(E)$.
- 2) Déterminer $Cl_R(\emptyset)$ et $Cl_R(E)$.

Exercice 2

On note $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) La matrice A est-elle inversible ?

2) Calculer AP, PT

3) Justifier que $A = PTP^{-1}$

4) On note $T = N + D$ où D est une matrice diagonale et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Déterminer D et vérifier que N et D commutent.

5) Que vaut N^n , pour tout entier $n \geq 2$

6) Dédurre de ce qui précède une expression de T^n . On donnera chacun de ses coefficients.

7) On considère les suites $(U_n)_{n \geq 0}$, $(V_n)_{n \geq 0}$ et $(W_n)_{n \geq 0}$ définies par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ V_0 = 0 \\ W_0 = 0 \end{cases} \text{ et } \forall n \geq 0 \begin{cases} U_{n+1} = 2U_n - V_n + W_n \\ V_{n+1} = V_n + W_n \\ W_{n+1} = -U_n + V_n + W_n \end{cases}$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix}$

Pour tout entier $n \geq 0$, établir une relation entre X_{n+1} , A et X_n .

8) En déduire que pour tout entier $n \geq 0$, l'expression de X_n en fonction de A et X_0 .

9) Déterminer pour tout entier $n \geq 0$, A^n en fonction de T^n , P et P^{-1} .

Déterminer cette relation par récurrence.

10) Déterminer, pour tout entier $n \geq 0$, l'expression de U_n , V_n et W_n en fonction de n.

Bon travail