

Devoir de contrôle N°1

Durée : 1h

Epreuve : Analyse



Problème :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin(g(x))$ avec $g(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$, $\forall x \in [-1, 1]$.

Partie 1 :

1. Montrer que g est dérivable sur $] -1, 1[$ et calculer sa dérivée.
2. Dresser le tableau de variations de g .

Partie 2 :

1. Trouver le domaine de définition de la fonction f .
2. Justifier que f est dérivable sur $] -1, 1[\setminus \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$ et que pour tout $x \in] -1, 1[\setminus \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$,

$$f'(x) = \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}|2x^2-1|}.$$

3. Dédire une expression plus simple de f sur $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$.

Partie 3 :

1. Trouver une primitive de $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. En déduire, avec une intégration par parties, une primitive de la fonction f sur $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$.
3. Déterminer une primitive de $\frac{x^2}{x^2-2}$ sur $] -\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.
4. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$ de l'équation différentielle :

$$(E) : y' - \frac{y}{x + \sqrt{2}} = \frac{x^3 + \sqrt{2}x^2}{x^2 - 2} - 2(x + \sqrt{2})f(x).$$