

L'utilisation de toute calculatrice est interdite.

Le devoir est composé de 2 pages et de deux exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.

Durée du devoir : 2h

Bonne chance

Exercice 1

On pose $\forall n \geq 1$, $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$

1. Convergence de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

- (a) Calculer a_1 et a_2 (on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles).
- (b) Justifier que $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n}$ puis étudier le sens de variation de (a_n) .
- (c) En déduire la convergence de la suite (a_n) .

2. Calcul de la limite.

- (a) i. En admettant que : $\forall x > 0$, $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$, comparer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, les trois nombres $\frac{1}{n+k+1}$, $\frac{1}{n+k}$ et $\ln(n+k+1) - \ln(n+k)$.
- ii. Comparer alors les trois sommes $\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n+k+1}$, $\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n+k}$ et $\sum_{k=0}^{n-2} (\ln(n+k+1) - \ln(n+k))$
- (b) Calculer $\sum_{k=0}^{n-2} (\ln(n+k+1) - \ln(n+k))$.
- (c) Vérifier que $a_n - \frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n+k+1}$ et que $a_n - \frac{1}{2n-1} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n+k}$
- (d) En déduire que $\forall n \geq 1$, $\ln(2 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{2n-1} \leq a_n \leq \ln(2 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n}$.
- (e) Déterminer la limite de la suite (a_n) .

3. Borne inférieure d'une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Considérons A et B comme deux parties non vides de $\mathbb{R}_+$, avec B est majorée.

- (a) En supposant que l'ensemble $A/B = \left\{ \frac{a}{b}, (a, b) \in A \times B \right\}$ admet une borne inférieure strictement positive, montrer que : $\inf(A/B) = \frac{\inf(A)}{\sup(B)}$.
- (b) Calculer : $\sup \left(\left\{ 2 - \frac{1}{p}; p \in \mathbb{N}^* \right\} \right)$.
- (c) En déduire : $\inf \left(\left\{ \frac{p}{2p-1} a_n; n, p \in \mathbb{N}^* \right\} \right)$.

Exercice 2

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par:

$$\begin{cases} U_0 \in \mathbb{R}, \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n^2 - U_n + 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Préliminaire

On note par f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - x + 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

- (a) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
- (b) Etudier sur $\mathbb{R}$ le signe de la fonction $h : x \mapsto h(x) = f(x) - x$.

→ Par la suite, l'ensemble des racines de h sera représenté par S .

2. Etude de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque $U_0 \in [0, 3]$

- (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n \in [0, 3]$.
- (b) En déduire que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

3. Première étude de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque $U_0 > 3$.

- (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n \in]3, +\infty[$.
- (b) Pourquoi est-on assuré que $\forall n \geq 0, \quad U_n \geq U_0$?
- (c) Etudier la nature de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. Etude d'une suite auxiliaire

On considère la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par

$$W_{n+1} = 2W_n - \ln 3 \text{ avec } W_0 \in \mathbb{R}.$$

Exprimer W_n en fonction de n et de W_0 .

5. Calcul de la limite de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque $U_0 > 6$.

On définit la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $\forall n \geq 0, \quad V_n = U_n - 3$.

- (a) Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n .
- (b) Montrer que $\forall n \geq 0, \quad \ln(V_{n+1}) \geq 2 \ln(V_n) - \ln(3)$.
- (c) Montrer que $\forall n \geq 0, \quad \ln(V_n) \geq W_n$ où $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite définie à la question 4 avec pour condition initiale $W_0 = \ln(V_0)$.
- (d) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(V_n)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.