

Section : PT1

Date : 16-03-2024

Matière : Algèbre

Durée : 1 heure

Devoir Surveillé N° 02

☞ L'usage de calculatrices est interdit.

☞ Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation.

Exercice 1

Partie I :

Soit P le polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$P(X) = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$$

et soit le nombre complexe $j = e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

1. Chercher j^{3n} , j^{3n+1} et j^{3n+2} pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que j et $-j$ sont deux racines de P et déterminer l'ordre de multiplicité de chaque racines.
3. Chercher les autres racines de P .
4. Factoriser P en produits des polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Partie II :

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; le polynôme $A_n(X) = X^n - 1$.

1. Trouver les racines de A_n dans $\mathbb{C}$.
2. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme A_n .
3. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $F(X) = \frac{1}{X^n - 1}$.

Exercice 2

1. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On considère l'application

$$f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P \longmapsto (P(-1), P(0), P(1)).$$

- (a) Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.
 - (b) Déterminer $\ker(f)$ le noyau de l'application f .
 - (c) Montrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. Soient F l'ensemble des polynômes constants de $\mathbb{R}_2[X]$ et $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \text{ tel que } P(0) = 0\}$.
 - (a) Montrer que F et G sont deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}_2[X]$.
 - (b) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.