

Institut Préparatoire aux Études  
d'Ingénieurs de Sfax

## *Devoir de Synthèse PT1 : Algèbre*

### Exercice 1 :

Soit  $\beta = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . On considère l'application linéaire  $f$  définie par :

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3 ; \quad f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3 ; \quad f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$$

On note  $f^2 = f \circ f$

- 1) Déterminer la matrice de  $f$  dans  $\beta$
- 2) Montrer que  $E_1 = \ker(f - id_{\mathbb{R}^3})$  et que  $N_{-1} = \ker(f^2 + id_{\mathbb{R}^3})$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ .
- 3) Déterminer  $u, v$  deux vecteurs tel que  $E_1 = Vect(u)$  et  $N_{-1} = Vect(v, f(v))$ . A-t-on  $E_1 \oplus N_{-1} = \mathbb{R}^3$ .
- 4) Montrer que  $\beta' = (u, v, f(v))$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- 5) On appelle  $\beta' = (u, v, f(v))$ , quelle est la matrice de  $f$  dans  $\beta'$ .
- 6) Quelle est la matrice de  $f^2$  dans  $\beta'$ .

### Problème :

#### Partie A :

On considère l'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y) \mapsto (6x - 4y, 9x - 6y)$

- 1) Démontrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$
- 2) a- Déterminer une base du noyau et une base de l'image de  $f$   
 b- En déduire  $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$  puis que  $f \circ f = 0_{L(\mathbb{R}^2)}$

On pose maintenant l'application linéaire  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y) \mapsto \frac{1}{22}(2y, -x)$

- 3) Démontrer que  $g$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .
- 4) a- On pose  $e_1 = (1, 0)$  et  $e_2 = (0, 1)$ . Calculer  $(f \circ g + g \circ f)(e_1)$  et  $(f \circ g + g \circ f)(e_2)$   
 b- En déduire que  $f \circ g + g \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$

#### Partie B :

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $2m$  où  $m \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $f \in L(E)$  de rang  $m$  tel que  $f \circ f = 0_{L(E)}$ .

- 1) a- Quelles sont les dimensions du noyau et de l'image de  $f$  ?  
 b- Démontrer que  $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$

On pose  $F = \text{Ker}(f)$  et soit  $G$  un supplémentaire de  $F$  dans  $E$

- 2) Quelle est la dimension de  $G$ .

On introduit l'application linéaire :  $h: G \rightarrow F$

$$x \mapsto f(x)$$

3) a- Montrer que l'application  $h$  est bien définie et qu'elle est linéaire.

b- Démontrer que  $\ker(h) = \{0_E\}$

c- Démontrer que  $h$  est un isomorphisme

Posons  $g$  l'endomorphisme de  $E$  défini par  $g(x) = \begin{cases} h^{-1}(x) & \text{si } x \in F \\ 0 & \text{si } x \in G \end{cases}$

4) Démontrer que  $f \circ g + g \circ f = id_E$

5) Démontrer que  $f \circ g \circ f = f$  puis montrer que  $f \circ g$  est un projecteur .