

Devoir de synthèse N°2

Durée : 2h

Epreuve : Analyse

L'usage des calculatrices est strictement interdit.

Problème:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \begin{cases} \frac{\arctan(t)}{t} & \text{si } t \in \mathbb{R}^*, \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$

Partie 1

- (a) Trouver le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction :
 $t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ puis déduire le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction $\arctan$.
- (b) Trouver l'équation de la tangente à la courbe de f au point $(0, 1)$ et déterminer la position locale de C_f par rapport à cette tangente.
- (c) Déterminer $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan(t) - t}{t^2}$.
- Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.
- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner $f'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \int_0^t \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{1}{2} t^2 f'(t).$$

- (b) En déduire le tableau de variations de f .

Partie 2

Soit ϕ la fonction définie par : $\phi(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ Où $g(x) = \int_0^x f(t) dt$.

- Vérifier que g est l'unique primitive de f qui s'annule en 0.
- Montrer que ϕ est continue sur $\mathbb{R}$ et paire.
- Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq \phi(x) \leq 1$. (on pourra commencer par supposer que $x > 0$)
- (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\phi'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - \phi(x))$.
(b) Vérifier que ϕ' est impaire sur $\mathbb{R}^*$.
(c) Dresser le tableau de variations de ϕ (sans calcul de limites) et déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) \leq 1$.

5. Montrer que ϕ est dérivable en 0, avec $\phi'(0) = 0$. (On pourra utiliser la question 3. de la partie 2)

Partie 3

Soit (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ u_{n+1} = \phi(u_n), \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Où ϕ est l'application définie dans la partie 2.

1. (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt = x(1 - f(x))$.
(b) En déduire que, pour tout $x > 0$, $|\phi'(x)| \leq \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} dt$. (On pourra utiliser les questions 3. et 4. de la partie 2)
2. Montrer que, pour tout $t \geq 0$, $0 \leq \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2}$.
3. (a) En déduire que, pour tout $x > 0$, $|\phi'(x)| \leq \frac{1}{4}$.
(b) Justifier que cette inégalité reste vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que l'équation $\phi(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in [0, 1]$.
5. (a) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$.
(b) En déduire que (u_n) est convergente.