



Devoir de Contrôle d'Algèbre N°1

Section: PT1

Durée: 1h

Date: Novembre 2024

Nbre de pages: 2

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Il est rappelé que tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré.

Exercice 1 :

Les questions 1, 2, 3 sont indépendantes.

1. On fixe n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

(a) Vérifier que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1}$.

(b) Calculer alors la somme $\sum_{k=1}^n k C_n^k$.

(c) Montrer que $\sum_{k=1}^n k^2 C_n^k = n(n+1) 2^{n-2}$.

2. On fixe n un entier naturel.

(a) Vérifier que, pour tout $k \in \{1, \dots, 2n+1\}$, $C_{2n}^{k-1} + C_{2n}^k = C_{2n+1}^k$.

(b) En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_{2n+1}^k$.

3. On fixe n un entier naturel.

(a) Montrer que $\sum_{0 \leq p, k \leq n} C_k^p = \sum_{0 \leq p \leq k \leq n} C_k^p$.

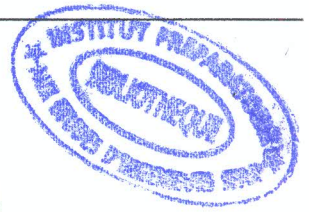
(b) Calculer la valeur de la somme $\sum_{0 \leq p, k \leq n} C_k^p$.

(c) Soit p un entier naturel tel que $n \geq p$. Montrer que $\sum_{k=p}^n C_k^p = C_{n+1}^{p+1}$.

(d) Retrouver alors la valeur de la somme $\sum_{0 \leq p, k \leq n} C_k^p$.

(e) En utilisant la question 3.c, déterminer la valeur de chacune des sommes suivantes

$$\sum_{k=0}^n k, \sum_{k=0}^n k^2 \text{ et } \sum_{k=0}^n k^3.$$



Exercice 2 :

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 3 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle inversible?
2. Calculer $\det(P)$. Conclure.
3. Sans calculer P^{-1} , montrer que $A = PTP^{-1}$.
4. Trouver P^{-1} .
5. On pose $N = 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = T - N$.
 - (a) Calculer N^n , pour tout entier $n \geq 2$.
 - (b) En déduire, pour tout entier $n \geq 2$, l'expression de T^n .
 - (c) Exprimer, pour tout entier $n \geq 2$, la matrice A^n en fonction de P , T et P^{-1} , puis calculer A^n en fonction de n .
6. On considère les suites réelles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$\begin{cases} x_{n+1} = -4y_n + 4z_n \\ y_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n + 3y_n - 2z_n \\ z_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n + y_n \end{cases}$$

avec $x_0 = y_0 = z_0 = 1$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

- (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.
- (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les expressions de x_n , y_n et z_n en fonction de n .