

Section : PT1

Date : 18-12-2024

Matière : Algèbre

Durée : 2 heure

Devoir de Synthèse N° 01

☞ L'usage de calculatrices est interdit.

☞ Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté de la rédaction et au soin de la présentation.

Exercice 1

1. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note tA la transposée de la matrice A .

- Montrer que la matrice tAA est symétrique.
- Montrer que si la matrice B est symétrique, alors ${}^tAB + BA$ est symétrique.
- Montrer que si la matrice B est antisymétrique, alors ${}^tAB + BA$ est antisymétrique.

2. Soit M la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par ; $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

- Calculer M^2 .
- Vérifier que $M^2 = 2I_3 - M$.
- En déduire que M est inversible et donner M^{-1} .

Exercice 2

On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } (x', y') \in \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \mathcal{R} (x', y') \iff \exists a > 0, \exists b > 0 \text{ tel que } x' = ax \text{ et } y' = by.$$

- Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
- Calculer les classes d'équivalence suivantes : $cl(1, 0)$, $cl(0, 1)$ et $cl(1, 1)$.

Problème:

Soient E et F deux ensembles non vides et A et B deux parties de E . On définit la différence symétrique de A et B par : $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

- Calculer $A \Delta A$ et $A \Delta \emptyset$.
- Montrer que $f(A) \Delta f(B) \subset f(A \Delta B)$.
- On pose $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ et l'application $g : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $g(I) = \sum_{i \in I} i, \forall I \in \mathcal{P}$.
 - Calculer $g(I_1)$ et $g(I_2)$ avec $I_1 = \{0, \dots, n\}$ et $I_2 = \{1, \dots, n\}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

- (b) Déduire que g n'est pas injective.
 - (c) A-t-on $g(I_1 \Delta I_2) \subset g(I_1) \Delta g(I_2)$?
 - (d) Montrer que g est surjective.
4. (a) Montrer que $A \Delta B = \emptyset \iff A = B$.
- (b) En déduire que si $f(A) \Delta f(B) = f(A \Delta B)$, alors f est injective.
5. On suppose que f est injective.
- (a) Montrer que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
- (b) En déduire que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
6. Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
7. En déduire que f est injective $\iff f(A) \Delta f(B) = f(A \Delta B)$.