

Devoir de contrôle N°1

Durée : 1h

Epreuve : Analyse

L'usage des calculatrices est strictement interdit.



Exercice 1 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x)$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Prouver que f est 2π -périodique sur $\mathbb{R}$.
3. Pour $x \in [-\pi, \pi]$, on souhaite simplifier l'expression de f .
 - (a) Simplifier $f(x)$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
 - (b) Simplifier $f(x)$ pour $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. (On pourra utiliser le fait que $\sin(x) = \sin(\pi - x)$)
 - (c) Simplifier $f(x)$ pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$, puis pour $x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$.
4. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur deux périodes.

Exercice 2 :

Soit la fonction $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.
2. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

3. Etablir que g est bijective sur $\mathbb{R}$ et que $g^{-1} = sh$.
4. (a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$F(x) = \int \sqrt{x^2 + 1} \, dx$$

- (b) Retrouver $F(x)$ en effectuant le changement de variable $x = sh(t)$.
(Rappel : $\forall t \in \mathbb{R}, ch^2(t) - sh^2(t) = 1$; $ch(2t) = 2ch^2(t) - 1$; $sh(2t) = 2sh(t)ch(t)$)

5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) : (1 + x^2) y' + xy = 1 + x^2.$$