

Devoir de synthèse N°1

Durée : 2h

Epreuve : Analyse

L'usage des calculatrices est strictement interdit.

Exercice :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + (\alpha^2 + 1)y = e^x.$$

2. Exprimer le terme général de la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_1 = 1, \\ u_{n+2} - 2u_{n+1} + (\alpha^2 + 1)u_n = 0. \end{cases}$$

(Rappel : $\sin(\arccos(t)) = \sqrt{1-t^2}$, $\forall t \in [-1, 1]$).

Problème :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par:

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Où $f(x) = x^2 + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Partie 1

1. Dresser le tableau de variations de f .
2. Trouver les points fixes de la fonction f .
3. On suppose dans cette question que $u_0 \in [-\frac{1}{2}, 0[$.

- (a) Montrer que $u_n \in [-\frac{1}{2}, 0[$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- (b) Etudier la nature de la suite (u_n) .
- (c) Trouver la limite de (u_n) .

4. On suppose dans cette question que $u_0 > 0$.

- (a) Montrer que $u_n \in]0, +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- (b) Etudier la monotonie de (u_n) .
- (c) Etudier la nature de (u_n) , puis, trouver sa limite.

5. On suppose dans cette question que $u_0 < -1$.

- (a) Montrer que $u_1 > 0$.
- (b) En déduire la nature de (u_n) .

Partie 2

Dans cette partie, on suppose que $u_0 \in [-\frac{1}{2}, 0[$.

1. (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n+1}{(n+2)^2} \leq \frac{1}{n+3}.$$

- (b) Démontrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$-\frac{1}{n+2} \leq u_n < 0.$$

2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = (n+1)u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Démontrer que (v_n) est décroissante.
3. Démontrer qu'il existe $\lambda \in [-1, 0[$ tel que (v_n) converge vers λ .
4. En déduire la limite de (u_n) .

Partie 3

Dans cette partie, on suppose que $u_0 \in [-\frac{1}{2}, 0[$.

Soient A_1 et A_2 deux parties non vides de $\mathbb{R}$ respectivement majorée et minorée.

1. Sans vérifier l'existence de $\sup(A_1)$, $\inf(A_2)$ et $\sup(A_1 - A_2)$ montrer que

$$\sup(A_1 - A_2) = \sup(A_1) - \inf(A_2),$$

où $A_1 - A_2 = \{a_1 - a_2; a_1 \in A_1 \text{ et } a_2 \in A_2\}$.

2. Déterminer la borne supérieure de l'ensemble

$$A = \{u_n - (p+1)u_p, \forall n, p \in \mathbb{N}\}.$$