

EXAMEN de PHYSIQUE

Exercice 1 :

On se propose d'étudier le mouvement relatif d'un point matériel dans un référentiel non galiléen $\mathcal{R}'(Ox'y'z')$ muni de la base orthonormée $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$. Le référentiel relatif $\mathcal{R}'$ est en rotation uniforme autour du référentiel fixe $\mathcal{R}(Oxyz)$ de vecteurs de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère une circonférence de rayon a et de centre O située dans le plan vertical $(Ox'z')$ qui tourne autour de l'axe $(Oz \parallel Oz')$ avec la vitesse angulaire constante ω . Un point matériel M , de masse m , glisse sans frottement sur la circonférence dont sa position est repérée par l'angle $\theta = (\vec{k}, \overrightarrow{OM})$ dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. A l'instant $t=0$, M est lâché sans vitesse initiale à partir de $\theta(0) = 0$ (voir figure 1).

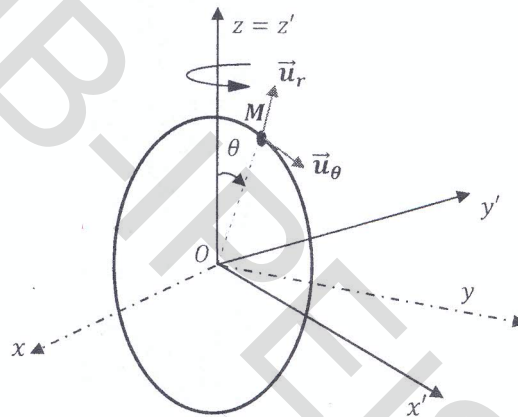


Figure 1

Tous les résultats seront exprimés dans la base mobile $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{j}')$.

1) Etude cinématique :

- Ecrire le vecteur de position $\overrightarrow{OM}$.
- Déterminer les vecteurs vitesse $\vec{V}_r$ et accélération relative $\vec{\gamma}_r$ du point M .
- Déterminer les vecteurs accélération d'entraînement $\vec{\gamma}_e$ et de Coriolis $\vec{\gamma}_c$ du point M .

2) Etude dynamique :

- Faire le bilan des forces agissant sur M dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$.
- Appliquer le principe fondamental de la dynamique et déduire l'équation différentielle du mouvement relatif.
- Retrouver l'équation différentielle du mouvement dans $\mathcal{R}'$ par l'application du théorème du moment cinétique.
- Déterminer les composantes de la réaction $\vec{R}$.

3) Etude énergétique dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$:

a) Montrer que l'énergie potentielle de M peut se mettre, à une constante près, sous la forme :

$$E_p(\theta) = A \cos(\theta) - B \omega^2 \sin^2(\theta)$$

Expliciter les expressions des constantes A et B en fonction de m, g et a.

b) Déterminer les positions d'équilibre relatif.

c) Etudier la stabilité de ces états d'équilibre en fonction de ω .

4) La figure 2 représente la courbe de variation $E_p(\theta)$.

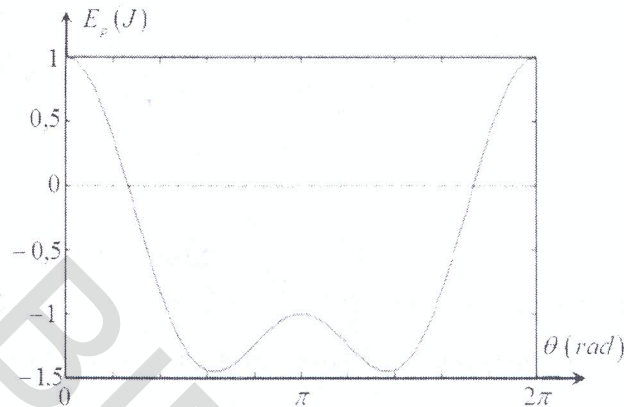


Figure 2

a) Déduire la valeur maximale E_0 de l'énergie potentielle et décrire la nature du mouvement.

b) Pour $\theta = \pi$, déterminer l'expression de la vitesse de M en fonction de g et a.

c) Dans le cas où l'énergie mécanique $E_m = 0$, décrire le mouvement de M et la nature des états d'équilibre relatif.

Exercice 2 :

Dans un référentiel géocentrique $R_g(Oxyz)$, on s'intéresse au mouvement d'une sonde spatiale M, de masse m, soumise à l'action d'une force centrale de gravitation exercée par la Terre de centre O :

$$\vec{F} = - \frac{GmM_T}{r^2} \vec{u}_r$$

On choisit les coordonnées polaires ($r=OM$; θ) et la base orthonormée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, pour étudier le mouvement elliptique de cette sonde lancée sur l'équateur à partir d'une altitude $h_p=30$ km au point périgée A de l'ellipse (confondu avec l'orbite circulaire de rayon $r_p=h_p+R_T \approx 6400$ km).

On note par V_p la vitesse de sonde au périgée A($r_p, \theta_p=0$) et par V_A sa vitesse à l'apogée A'($r_A, \theta_A=\pi$) (voir la figure 3).

Ce mouvement est caractérisé par un moment cinétique constant $\vec{L}_O$ orthogonal à un vecteur $\vec{\varepsilon}$ de

$$\text{Laplace-Runge suivant le grand axe de l'ellipse : } \vec{\varepsilon} = \frac{\vec{P} \wedge \vec{L}_O}{mK} - \vec{u}_r = \frac{\vec{V} \wedge \vec{L}_O}{K} - \vec{u}_r$$

où $\vec{P}$ est le vecteur quantité de mouvement et $k = GmM_T$ une constante.

Données : $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ S.I : constante de gravitation. $R_T = 6373$ km : Rayon terrestre

$M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg : masse de la terre. $m = 2000$ kg : masse de la sonde

$a = 7000$ km : distance de demi-grand axe de l'ellipse.

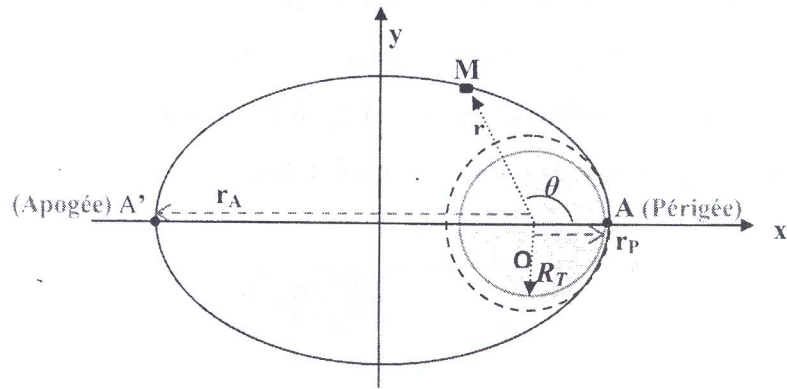


Figure 3

- 1.) Appliquer la relation fondamentale de la dynamique et déduire l'expression de la vitesse de satellisation V_c de la sonde sur l'orbite circulaire en fonction de G , M_T et $r = r_p$.
- 2.) Déterminer l'expression du moment cinétique $\vec{L}_O$.
- 3.) Montrer que le vecteur $\vec{\varepsilon}$ est un vecteur constant dans le plan de la trajectoire elliptique.
- 4.) Effectuer le produit scalaire $\vec{\varepsilon} \cdot \vec{u}_r$ et montrer que l'équation conique de la trajectoire elliptique est de la forme :
$$r = \frac{P}{1 + e \cos(\theta)}$$

avec θ est l'angle entre $\vec{\varepsilon}$ et $\vec{u}_r$; e l'excentricité et P le paramètre de l'orbite qu'on les exprimera en fonction des variables du problème.

- 5.) Donner l'expression de l'énergie mécanique totale E_m en fonction de m , V , k et r .
- 6.) a-/ Calculer le carré ε^2 du vecteur de Laplace-Runge et montrer la relation suivante :

$$\varepsilon^2 = \frac{V^2 L_0^2}{K^2} - \frac{2 L_0^2}{m K r} + 1$$

b-/ Déduire une relation entre l'énergie mécanique E_m et l'excentricité e sachant que $e = \varepsilon$

- 7.) a-/ Exprimer les rayons r_p et r_A en fonction de a , e et P .

b-/ Montrer que l'énergie mécanique de la sonde $E_m = -\frac{GmM_T}{2a}$ et donner sa valeur.

- 8.) D'après la conservation de l'énergie mécanique aux points A et A', montrer que les rayons r_p et r_A sont racines d'une équation du second degré dont les coefficients s'expriment en fonction de m , k , E_m et L_0 .

- 9.) a-/ Déterminer la vitesse de la sonde V_p sur l'orbite elliptique en fonction de M_T , G , a et r_p .

b-/ Trouver une relation entre r_p , r_A , V_A et V_p et calculer la valeur de la vitesse V_A .

- 10.) Estimer la période T de révolution de cette sonde sur l'orbite elliptique.