

Devoir de contrôle d'Algèbre N 2

Exercice 1 Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle suivante :

$$F = \frac{3x - 1}{x^2(x^2 + 1)^2}.$$

Exercice 2 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère le polynôme :

$$P(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + aX + 1$$

1. Montrer que si le réel 1 est racine de P , alors son ordre de multiplicité est au moins 2. Montrer aussi le même résultat pour le réel -1 .
2. Existe-t-il des réels a et b tels que le réel 1 soit racine de P d'ordre supérieur à 2 ? Si oui, quel est alors son ordre de multiplicité.
3. Soit $F = \{Q \in \mathbb{R}[X]; P \text{ divise } Q\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$
4. Trouver un supplémentaire à F dans $\mathbb{R}[X]$. (Pensez à la division euclidienne).
5. Maintenant, on pose $a = b = -2$.
 - a) Écrire la formule de Taylor de P en $\alpha = 1$.
 - b) En déduire une expression de P comme combinaison linéaire des puissances de $(X - 1)$.
 - c) Factoriser le polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$.
 - f) Décomposer la fraction rationnelle $F(X) = \frac{1}{P(X)}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3 On pose, $H = \{(b, a, -2a + 2b, a - b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ et $K = \{(0, 0, c, d) : c, d \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que H et K sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Écrire H sous la forme $\text{Vect}(u_1, u_2)$ et G sous la forme $\text{Vect}(u_3, u_4, u_5)$, où u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 sont cinq vecteurs de $\mathbb{R}^4$, que l'on précisera.
3. Déterminer $H \cap K$.
4. Montrer que $H \cup K$ n'est pas un espace vectoriel.
5. H et K sont-ils des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^4$? Justifier votre réponse.