

Devoir de synthèse d'algèbre n° 2

Durée : 2h

Exercice 1 : (07 points)

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles. On considère le sous ensemble F de E formé des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel réel.
2. On considère l'application Φ définie par :

$$\begin{aligned} \Phi : F &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto (u_0, u_1) \end{aligned}$$

Montrer que Φ est une application linéaire.

3. Montrer que Φ est un isomorphisme.
4. En déduire que F est de dimension finie, et donner la dimension de F .
5. Déterminer deux suites géométriques non nulles $(r_1^n)_n$ et $(r_2^n)_n$ dans F .
6. Montrer que $\{(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, (r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ est une base de F .
7. Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de F , donner ses coordonnées dans la base obtenue.

Exercice 2 : (05 points)

On considère l'application φ définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P &\mapsto P(X) + P'(X) \end{aligned}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Écrire la matrice M de φ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer la matrice canoniquement associée à φ^{-1} .
5. En déduire l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que

$$P(X) + P'(X) = 1 - X^2$$

Problème : (08 points)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $u = (2, 1, -2)$.

- 1)
 - a. Montrer que $\ker(f) = \text{Vect}(u)$.
 - b. La matrice A est-elle inversible ?
- 2)
 - a. Déterminer le vecteur v de $\mathbb{R}^3$, dont la 2^{ème} coordonnée dans $\mathcal{B}$ vaut 1, et qui vérifie $f(v) = u$.
 - b. Démontrer que le vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la 2^{ème} coordonnée dans $\mathcal{B}$ vaut 1, et qui vérifie $f(w) = v$ est $w = (0, 1, -1)$.
 - c. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera $\mathcal{B}'$.
 - d. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
Expliciter la matrice P .
- 3)
 - a. Écrire la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.
 - b. Donner la relation liant les matrices A , N , P et P^{-1} .
 - c. En déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, on a : $A^k = 0$.
- 4) On note $\mathcal{C}_N$ (respectivement $\mathcal{C}_A$) l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec N (respectivement avec A).
 - a. Montrer que $\mathcal{C}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On admet que $\mathcal{C}_N$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
 - b. Montrer que : $\mathcal{C}_N = \text{Vect}(I, N, N^2)$.
 - c. Établir que : $M \in \mathcal{C}_A \Leftrightarrow P^{-1}MP \in \mathcal{C}_N$.
 - d. En déduire que : $\mathcal{C}_A = \text{Vect}(I, A, A^2)$.
 - e. Quelle est la dimension de $\mathcal{C}_A$?

Fin de l'énoncé