

Devoir de contrôle N°2

Durée : 1h

Epreuve : Analyse

L'usage des calculatrices est strictement interdit.

Problème:

Partie 1

1. Montrer que, pour tout $x \in]0, 1]$, $0 < \sin(x) \leq x$.
2. (a) Montrer que, pour tout $x \in]0, 1]$, $1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.
(Ind. Développer en série de Mac-Laurin la fonction cosinus à l'ordre 3).
(b) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$.
3. (a) Déterminer le domaine de définition des fonctions $f_1 : x \mapsto \sin(\sqrt{x})$ et $f_2 : x \mapsto \cos(\sqrt{x})$.
(b) Déterminer le domaine de dérivabilité des fonctions f_1 et f_2 .

Partie 2

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \cos(\sqrt{x}) - \frac{\sqrt{x}}{4} \sin(\sqrt{x}).$$

1. Déterminer le domaine de dérivabilité de f .
2. Calculer la dérivée de f quand-elle existe.
3. Montrer que $\forall x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$.
4. En déduire que f est $\frac{3}{4}$ -Lipshitzienne sur $[0, 1]$.
5. Montrer que f admet au moins un point fixe α dans $[0, 1]$.
6. En déduire que α est unique.

Partie 3

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par: $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
($\cos(1) \approx 0.54$ et $\sin(1) \approx 0.84$).

2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{4} |u_n - \alpha|.$$

3. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

4. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est convergente.