

Institut Préparatoire aux Études
d'Ingénieurs de Sfax

Devoir Algèbre PT1

Exercice 1 : (8pts)

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

- 1) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
- 2) Calculer $D = P^{-1}AP$
- 3) Calculer D^n tout entier $n \in \mathbb{N}$
- 4) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$
- 5) On considère les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $a_0 = b_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\begin{cases} a_{n+1} = -a_n - 2b_n \\ b_{n+1} = 3a_n + 4b_n \end{cases}, \text{ pour tout entier } n \in \mathbb{N}$$

On pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}$

- a/ Montrer que $AU_n = U_{n+1}$
- b/ Montrer par récurrence $A^n U_0 = U_n, \forall n \in \mathbb{N}$
- c/ Calculer a_n et b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$

Exercice 2 : (7pts)

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{2n}^{2k+1}$ et $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_{2n}^{2k}$
 - a/ Ecrire $z = (1+i)^{2n}$ sous forme trigonométrique.
 - b/ En déduire la valeur T_n et S_n
- 2) Soit n un entier naturel. On considère la somme double $S_n = \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n 2^j$
 - a/ Vérifier que $S_n = n2^{n+1} + 1$
 - b/ Démontrer que $S_n = \sum_{j=0}^n (j+1)2^j$
 - c/ En déduire que : $\sum_{k=1}^n k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$
 - d) Déterminer alors la valeur de la somme double $T_N = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{i+1} k2^{k-1}$

Exercice 3 : (5pts)

On considère la matrice de $M_4(\mathbb{R})$ suivant : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- 1) a/ Calculer A^2
- b/ Montrer que A est inversible puis déterminer A^{-1}
- 2) Montrer que A inversible et déterminer A^{-1} par la méthode de Gauss